Mécanique diracienne, systèmes hamiltoniens avec contraintes et transformations de jauge

Guillaume LHOST

31 juillet 2020

Table des matières

1 Introduction

1.1 Discussion préliminaire

Tous les systèmes dynamiques ne satisfont pas aux hypothèses du théorème d'existence et d'unicité de Cauchy ; il se peut que les équations lagrangiennes du mouvement les gouvernant ne peuvent s'écrire sous la forme normale :

$$\ddot{q}^{\alpha} = F^{\alpha}(q^{\nu}, \dot{q}^{\mu}) \qquad qqsoit \quad \alpha \in \{1, ..., N\} \tag{1}$$

Les systèmes dont les équations du mouvement ne peuvent s'écrire sous la forme normale (1) sont dits à invariance de jauge. ils jouent un rôle fondamental en physique. Leurs équations lagrangiennes du mouvement ne sont plus toutes indépendantes et la transformation de Legendre menant au formalisme hamiltonien est telle que les variables canoniques sont restreintes par des contraintes. Dès lors, les systèmes à invariance de jauge ont la propriété de présenter des fonctions arbitraires dans l'expression de la solution générale des équations du mouvement. Les chapitres qui suivent donnent une brève description des systèmes à invariance de jauge et donc présentant des contraintes dans leur formulation hamiltonienne, le but étant de fournir une méthode de résolution des équations du mouvement ainsi que de discuter de diverses notions liées aux contraintes du système hamiltonien et aux transformations de jauge. L'étude des systèmes à invariance de jauge est importantes car les théories de l'électromagnétisme, de la gravitation, des intéractions fortes et faibles, des cordes,... présentent de tels systèmes.

Ce papier est très fortement inspiré du chapitre 5 du livre de Philippe Spindel "MECANIQUE, Volume 2, Mécanique Analytique" [1], de l'article de Xavier Beckaert et Jeong-Hyuck Park "Symmetries and dynamics in constrained systems" [3] et quelque peu de "Quantization of Gauge Systems" de Marc Henneaux et Claudio Teitelboim [2].

1.2 Exemple introductif

Commençons tout d'abord par l'étude rapide d'un lagrangien particulier, à savoir :

$$L = \frac{1}{2}(x - \dot{y})^2 \tag{2}$$

On voit que ce système est invariant sous la transformation

$$\delta y = f \qquad \delta x = \dot{f}$$

où f est une fonction du temps arbitraire. En appliquant les équations d'Euler-Lagrange, on trouve une unique équation :

$$x = \dot{y}$$

Et donc la solution générale du système fait apparaître une fonction arbitraire $\mathcal{F}(t)$:

$$y = \mathcal{F}(t) \qquad x = \dot{\mathcal{F}}(t)$$

Si l'on veut effectuer une étude hamiltonienne du système, il faut avant tout remarquer que le moment p_x est nul, L ne dépendant pas de $\dot{x}$:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$$

Par conséquent, $\dot{x}$ ne peut être exprimé en fonction des variables (x, y, p_x, p_y). L'hamiltonien se voit alors être difficilement définissable.

En outre, on réalise que la matrice cinétique 2×2, W, est singulière,

$$W = \Big(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{\alpha} \partial \dot{q}^{\beta}}\Big) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow det(W) = 0$$

Or le caractère non singulier de cette matrice est nécessaire pour passer du formalisme lagrangien au formalisme hamiltonien sans anicroche.

Rien n'est pour autant perdu, mais il est clair qu'une étude de systèmes de la sorte est nécessaire.

2 Identités de Noether

2.1 dérivation des identités

Plaçons-nous dans l'espace des configurations de dimension N. On se rappelle que pour des transformations infinitésimales :

$$q^\alpha \longrightarrow q^\alpha + \epsilon^a \varphi_a^\alpha(q,\dot{q},t) \quad avec \;\; \delta q^\alpha = \epsilon^a \varphi_a^\alpha \tag{3}$$

$$\dot{q}^\alpha \longrightarrow \dot{q}^\alpha + \frac{d}{dt}\epsilon^a \varphi_a^\alpha(q,\dot{q},t) \quad avec \;\; \delta \dot{q}^\alpha = \frac{d}{dt}\epsilon^a \varphi_a^\alpha \tag{4}$$

où a varie de 1 à $\mathcal{M}$, si le lagrangien reste invariant à une dérivée totale par rapport au temps près $\frac{d}{dt}\big(\epsilon^a F_a\big)$, les équations du mouvement admettent $\mathcal{M}$ intégrales premières du mouvement :

$$K_a = \varphi_a^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - F_a(q,\dot{q}) \tag{5}$$

Supposons maintenant que ϵ^a soit une fonction arbitraire, c'est-à-dire $\epsilon^a = \epsilon f^a(t)$. Le calcul de la variation de l'action S sur une trajectoire quelconque nous permet de trouver les identités suivantes :

$$\Big[\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\Big)\Big]\varphi_a^\alpha \equiv 0 \tag{6}$$

Les trajectoires étant quelconques, on trouve, après avoir développé la dérivée par rapport au temps, que $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta}\varphi_a^\alpha \equiv 0$. Autrement dit, la matrice cinétqiue $W_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta}$ admet $\mathcal{M}$ vecteurs propres avec la valeur propre 0. Il en résulte que la matrice cinétique n'est pas inversible.

On retient alors qu'une symétrie sous transformation de jauge du système dynamique dans l'espace des configurations, c'est-à-dire une transformation de symétrie présentant une fonction arbitraire $f(t)$, implique que la matrice cinétique est singulière. Par conséquent, les équations du mouvement ne peuvent être sous la forme normale (1), et des fonctions arbitraires apparaitront dans la solution générale des équations du mouvement.

Remarquons que des dérivées peuvent apparaitre dans la transformation infinitésimale : en plus d'avoir une fonction $\epsilon f^a(t)$ dans les transformations infinitésimales, il est tout à fait possible de trouver, dans ces transformations, certaines des dérivées de $f^a(t)$,

$$\delta q^\alpha = \epsilon \sum_{k=0}^{P} \frac{d^k f^a(t)}{dt^k}\varphi_{ak}^\alpha \tag{7}$$

Dans ce cas, les identités de Noether sont

$$\sum_{k=0}^{P}(-1)^k \frac{d^k}{dt^k}\Big\{\Big[\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\Big)\Big]\varphi_{a,k}^\alpha\Big\} \equiv 0 \tag{8}$$

Cela se déduit de :

$$\delta S = \int \Big[\frac{\delta L}{\delta q^\alpha}\delta q^\alpha + \frac{d}{dt}\big(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha\big)\Big]dt \tag{9}$$
$$= \epsilon\int \frac{\delta L}{\delta q^\alpha}\sum_{k=0}^{P}\frac{d^k f^a(t)}{dt^k}\varphi^\alpha_{ak}dt \quad + \quad \epsilon\big(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha\big)\Big|_{t_i}^{t_f} \tag{10}$$
$$= \epsilon\int \Big\{\Big[\frac{\delta L}{\delta q^\alpha}\varphi^\alpha_{a1} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\delta L}{\delta q^\alpha}\varphi^\alpha_{a2}\Big)\Big]f^a + \frac{\delta L}{\delta q^\alpha}\sum_{k=2}^{P}\frac{d^k f^a(t)}{dt^k}\varphi^\alpha_{ak}\Big\}dt \tag{11}$$
$$+\,\epsilon\big(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha\big)\Big|_{t_i}^{t_f} + \epsilon\big(\frac{\delta L}{\delta q^\alpha}\varphi^\alpha_{a,2}f^a\big)\Big|_{t_i}^{t_f} \tag{12}$$
$$= ...... \tag{13}$$
$$= \epsilon\int f^a\sum_{k=0}^{P}(-1)^k\frac{d^k}{dt^k}\Big\{\Big[\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\Big)\Big]\varphi^\alpha_{a,k}\Big\}dt + termes \;\; aux \;\; bords \tag{14}$$

En développant les dérivées par rapport au temps, on voit que, au final, il n'y a qu'un seul terme comprenant le coefficient $d^{P+2}q^\beta/dt^{P+2}\varphi^\alpha_{a,N}$. Par conséquent, on retrouve une égalité analogue à ce qui a déjà été établi :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\beta \partial \dot{q}^\alpha}\varphi^\alpha_{a,P} \equiv 0 \tag{15}$$

2.2 Exemple

Reprenons le lagrangien de l'exemple introductif et considérons les transformations :

$$\delta x = \epsilon\dot{f}(t) = \epsilon(\varphi^x_0 f(t) + \varphi^x_1\dot{f}(t)) \tag{16}$$
$$\delta y = \epsilon f(t) = \epsilon(\varphi^y_0 f(t) + \varphi^y_1\dot{f}(t)) \tag{17}$$
$$\tag{18}$$

Autrement dit, $\varepsilon(t) = \epsilon f(t)$ pour la variation de y et la dérivée de f apparaît dans la variation de x.

On a donc que

$$\varphi^x_0 = \varphi^y_1 = 0 \;\; et \;\; \varphi^x_1 = \varphi^y_0 = 1 \tag{19}$$

On trouve bien que la variation de L est une dérivée par rapport au temps (d'une constante) :

$$\delta L = (x - \dot{y})(\delta x - \delta\dot{y}) \tag{20}$$
$$= (x - \dot{y})\epsilon(\dot{f}(t) - \dot{f}(t)) \tag{21}$$
$$= 0 \tag{22}$$

L'identité de Noether est alors ici

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\varphi^y_0 + \frac{d}{dt}\Big[(-1)\frac{\partial L}{\partial x}\varphi^x_1\Big] \equiv 0 \tag{23}$$

On peut en effet calculer explicitement, sachant que $\frac{\partial L}{\partial x} = x - \dot{y}$ et $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} - x$,

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\varphi^y_0 - \frac{d}{dt}\big(\frac{\partial L}{\partial x}\varphi^x_1\big) = -\ddot{y} + \dot{x} - \dot{x} + \ddot{y} = 0 \tag{24}$$

Finalement on trouve l'égalité suivante qui fournit un vecteur propre à valeur propre nulle de la matrice cinétique :

$$(W)_{\alpha\beta}(\varphi_1)^\beta = 0 \tag{25}$$
$$\text{en accord avec} \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \tag{26}$$

3 Transformation de Legendre singulière

Les variables p_α sont telles que :

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \equiv \mathcal{P}_\alpha(q, \dot{q}, t) \tag{27}$$

Etant donné le caractère singulier de la matrice cinétique W, il ne sera pas toujours possible d'écrire que $\dot{q}^\alpha = \mathcal{Q}^\alpha(q, p, t)$ via (27) ; l'image par la transformation de Legendre de l'espace des configurations sera une sous-variété $\mathcal{V}$ et seules $2N - \mathcal{M}$ variables de vitesses pourront s'exprimer comme des fonctions des q et des p. En outre, de (27) seront issues $\mathcal{M}$ relations définissant la sous variété $\mathcal{V}$ de l'espace des phases :

$$\phi_m^{(1)}(q, p, t) = 0 \tag{28}$$

Ces relations sont appelées *contraintes primaires* (on suppose leur gradient bien défini et non nul).

En remplaçant, dans (28), les variables p par leur expression (27), et en dérivant par rapport aux variables de positions et vitesses, on trouve que les $\mathcal{M}$ vecteurs de composantes

$$\frac{\partial \phi_m^{(1)}}{\partial p_\beta}\Big|_{p=p(q,\dot{q},t)} \tag{29}$$

sont les vecteurs propres à valeur propre nulle de W. Aussi, la contre-image d'un point $\tilde{P}$ de $\mathcal{V}$ par la transformation de Legendre est un sous-espace de dimension $\mathcal{M}$ de l'espace des configurations. Si $(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$ appartiennent à la contre-image de $\tilde{P}$, il en est de même pour le point $(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}} + u^m \frac{\partial \phi_m^{(1)}}{\partial p_\beta})$:

$$\mathcal{P}_\alpha(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}^\beta + u^m \frac{\partial \phi_m^{(1)}}{\partial p_\beta}\Big|_{p=p(q,\dot{q})}) = \mathcal{P}_\alpha(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \tag{30}$$

En général, une fonction $F(q, \dot{q}, t)$ est une fonction sur $\mathcal{V}$ si et seulement si elle est constante sur les contre-images de chaque point de $\mathcal{V}$:

$$F(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}^\beta + u^m \frac{\partial \phi_m^{(1)}}{\partial p_\beta}\Big|_{p=p(q,\dot{q})}, t) = F(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, t) \tag{31}$$

En développant $F(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}^\beta + u^m \frac{\partial \phi_m^{(1)}}{\partial p_\beta}\big|_p, t)$ à l'ordre un, on voit que cela signifie que F doit vérifier les relations :

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^\beta} \frac{\partial \phi_m}{\partial p_\beta}\Big|_{p=P(q,\dot{q})} = 0 \tag{32}$$

En particulier, la fonction d'énergie :

$$W(q, \dot{q}, t) = \mathcal{P}_\alpha \dot{q}^\alpha - L(q, \dot{q}, t) \tag{33}$$

vérifie (31). On a, compte tenu des contraintes :

$$W(q, \dot{q}, t) = h[q, \mathcal{P}(q, \dot{q}, t), t] \tag{34}$$

sur la variété $\mathcal{V}$.

C'est à partir de cette relation (34) que l'on définit ce qu'on appelle *l'hamiltonien canonique* : il s'agit de l'ensemble des fonctions de l'espace des phases qui coïncident avec $h(q, p, t)$ sur $\mathcal{V}$. En notation de Dirac, on introduit le symbole $\approx$ appelé *égalité faible* qui indique que l'égalité se fait modulo les conditions imposées par $\mathcal{V}$. Et donc un hamiltonien canonique est une fonction faiblement égale à $h(q, p, t)$.

$$\mathcal{H}_c(q, p, t) \approx h(q, p, t) \tag{35}$$

Le choix de $\mathcal{H}_c(q, p, t)$ est très arbitraire. Si $\mathcal{H}_c(q, p, t)$ vérifie bien la condition (35), alors on pourrait tout à fait choisir comme hamiltonien canonique la fonction $\mathcal{H}_c(\tilde{q}, p, t)$ définie par :

$$\mathcal{H}_c(\tilde{q}, p, t) = \mathcal{H}_c(q, p, t) + C^m(q, p, t)\phi_m^{(1)}(q, p, t) \tag{36}$$

où les $C^a(q, p, t)$ sont des fonctions arbitraires des variables canoniques q et p.

4 Complément sur les contraintes primaires

Ici, nous analysons de façon plus approfondie la notion de contrainte primaires et nous donnons une autre définition de l'hamiltonien canonique, définition équivalente à celle ci-dessus.

4.1 Contraintes primaires et surface des contraintes

Reprenons la relation (27) définissant les N moments ; on a $p_\alpha = f_\alpha(q, \dot{q}, t)$. Le but est désormais d'essayer d'inverser ces relations afin d'exprimer les vélocités $\dot{q}^\alpha$ en fonctions des q, des p et éventuellement du temps.

Si certains des moments, notés p_a, dépendent non-trivialement de certaines vitesses, notées $\dot{q}^{\hat{a}}$, alors ces $\dot{q}^{\hat{a}}$ en question peuvent être exprimées en termes de p_a et d'autres vélocités $\dot{q}^{\hat{m}}$, ainsi que des q^α et du temps :

$$\dot{q}^{\hat{a}} = h^{\hat{a}}(q^\alpha, p_a, \dot{q}^{\hat{m}}, t) \tag{37}$$

Les autres moments qui ne sont pas des p_a sont notés p_m, ils sont fonctions de $(q^\alpha, p_a, \dot{q}^{\hat{m}}, t)$ et ne pourront pas permettre aux $\dot{q}^{\hat{m}}$ d'être exprimés en fonctions des moments. Une fois que l'on a trouvé tous les $\dot{q}^{\hat{a}}$ pouvant s'écrire comme (37), et donc distingué tous les $\dot{q}^{\hat{m}}$, on obtient :

$$\dot{q}^{\hat{a}} = h^{\hat{a}}(q^\alpha, p_a, \dot{q}^{\hat{m}}, t) \quad ; \quad p_m = f_m(q^\alpha, p_a, t) \tag{38}$$

Les a et m, ainsi que les $\hat{a}$ et $\hat{m}$ forment des ensembles distincts : $\{a\} \cap \{m\} = \emptyset = \{\hat{a}\} \cap \{\hat{m}\}$ (et aussi, $\{a\} \cup \{m\} = \{\alpha\} = \{\hat{a}\} \cup \{\hat{m}\}$). Remarquons que p_a n'est pas nécessairement la variable conjuqué de $\dot{q}^{\hat{a}}$, mais il y a tout de même une relation 1-1 $\{a\} \longleftrightarrow \{\hat{a}\}$. Les $\dot{q}^{\hat{m}}$ sont des variables indépendantes, de même que les p_a. A l'inverse, les p_m et $\dot{q}^{\hat{a}}$ ne sont pas indépendantes : ils s'expriment comme (38).

Si le système est soumis à $\mathcal{M}$ contraintes primaires, alors on compte dans l'espace des phases $\mathcal{M}$ relations indépendantes :

$$\phi_m(p, q, t) = p_m - f_m(q^\alpha, p_a, t) \tag{39}$$

Ces contraintes primaires définissent la surface des contraintes primaires $\mathcal{V}$ de dimensions $2N - \mathcal{M}$:

$$\mathcal{V} = \{(p, q) | \ \ \phi_m(p, q, t) = 0 \quad , \quad 1 \leqslant m \leqslant \mathcal{M}\} \tag{40}$$

Etant donné l'indépendance de ces relations, les $\mathcal{M}$ vecteurs à N coordonées :

$$\overrightarrow{\partial_p}\phi_m\Big|_{\mathcal{V}} = \Big(\frac{\partial \phi_m}{\partial p_1}, \frac{\partial \phi_m}{\partial p_2}, ..., \frac{\partial \phi_m}{\partial p_N}\Big)\Big|_{\mathcal{V}} \tag{41}$$

Sont linéairement indépendants.

Sur la surface des contraintes primaires, tout point peut être repéré par $2N - \mathcal{M}$ variables indépendantes x^i. Ainsi, les points (p, q) de $\mathcal{V}$ correspondent à une fonction f des variables x^i et du temps si les contraintes dépendent explicitement du temps :

$$\mathcal{V} = \{(p, q) = f(x, t)\} \tag{42}$$

En outre, les contraintes indépendantes peuvent être vues comme des variables indépendantes ϕ_m de sorte que tout point de l'espace des phases peut être repéré par les coordonnées (x^i, ϕ_m) et pour une fonction arbitraire de l'espace des phases $F(q, p, t)$, on peut définir $\mathcal{M}$ fonctions $F^m(p, q, t)$ telles que :

$$F(p, q, t) := \tilde{F}(x, \phi, t) = \tilde{F}(x, 0, t) + \phi_m F^m(p, q, t) = \tilde{F}(p, q, t)\Big|_{\mathcal{V}} + \phi_m F^m(p, q, t) \tag{43}$$

4.2 Contraintes à partir des équations d'Euler-Lagrange

Nous allons travailler ici avec les variables indépendantes $(q^{\hat{a}}, q^{\hat{m}}, p_a, \dot{q}^{\hat{m}})$. Les équations d'Euler-Lagrange du mouvement sont alors équivalentes à :

$$\frac{dp_a}{dt} = \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q^a}\Big|_{\dot{q}^{\hat{a}}=h^{\hat{a}}(q^\alpha,p_a,\dot{q}^{\hat{m}},t)} \tag{44}$$

$$\frac{df_m(q^\alpha,p_a,t)}{dt} = \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q^m}\Big|_{\dot{q}^{\hat{a}}=h^{\hat{a}}(q^\alpha,p_a,\dot{q}^{\hat{m}},t)} \tag{45}$$

$$Avec \quad \frac{dq^{\hat{a}}}{dt} = h^{\hat{a}}(q^\alpha, p_a, \dot{q}^{\hat{m}}, t) \quad ; \quad \frac{dq^{\hat{m}}}{dt} = \dot{q}^{\hat{m}} \tag{46}$$

Ce qui nous conduit, en substituant (44) et (46) dans (45), à :

$$h^{\hat{a}}\frac{\partial f_m}{\partial q^{\hat{a}}} + \dot{q}^{\hat{m}}\frac{\partial f_m}{\partial q^{\hat{m}}} + \frac{\partial f_m}{\partial p_a}\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q^m}\Big|_{\dot{q}^{\hat{a}}=h^{\hat{a}}} + \frac{\partial f_m}{\partial t} = \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q^m}\Big|_{\dot{q}^{\hat{a}}=h^{\hat{a}}} \tag{47}$$

m appartenant à $\{1, ..., \mathcal{M}\}$. Ces $\mathcal{M}$ relations en (47) constituent $\mathcal{M}$ contraintes pour les variables $\dot{q}^{\hat{m}}$; certains $\dot{q}^{\hat{m}}$ deviennent des fonctions des autres variables indépendantes ou bien des paramètres totalement indépendants. Une fois les $\dot{q}^{\hat{m}}$ déterminés, l'évolution dans le temps des coordonnées $(q^{\hat{a}}, q^{\hat{m}}, p_a)$ est donné par les équations (44) et (46). Toutefois, il arrive que les contraintes (47) soient non linéaires en les $\dot{q}^{\hat{m}}$ et donc difficiles à résoudre. On peut alors utiliser les $2N$ variables indépendantes $(q^\alpha, p_a, \dot{q}^m)$ (et non les $\dot{q}^{\hat{m}}$), où les $\dot{q}^m$ sont telles que les contraintes (47) sont linéaires en les $\dot{q}^m$.

4.3 Hamiltonien canonique

Une autre façon de définir l'hamiltonien canonique, tout à fait équivalente à (35), est de prendre la définition d'hamiltonien $\mathcal{H} = \dot{q}^\alpha p_\alpha - L$ tout en prenant en compte que $\dot{q}^{\hat{a}} = h^{\hat{a}}(q^\alpha, p_a, \dot{q}^{\hat{m}}, t)$ et en considérant les variables indépendantes $(q^{\hat{a}}, q^{\hat{m}}, p_a, \dot{q}^{\hat{m}})$.

$$\mathcal{H}_c(q^\alpha, p_a, t) := \dot{q}^\alpha p_\alpha - L(q,\dot{q},t) \tag{48}$$

$$= h^{\hat{a}}(q^\alpha, p_a, \dot{q}^{\hat{m}}, t)p_{\hat{a}} + \dot{q}^{\hat{m}}p_{\hat{m}} - L(q^\alpha, h^{\hat{a}}(q^\alpha, p_a, \dot{q}^{\hat{m}}, t), \dot{q}^{\hat{m}}) \tag{49}$$

$$= \dot{q}^a p_a + \dot{q}^m f_m(q^\alpha, p_a, t) - L(q^\alpha, h^{\hat{a}}(q^\alpha, p_a, \dot{q}^{\hat{m}}, t), \dot{q}^{\hat{m}}) \tag{50}$$

A une combinaison linéaire des contraintes primaires près.

On montre (heureusement) que $\mathcal{H}_c$ n'est pas fonction des vélocités $\dot{q}^{\hat{m}}$ en calculant $\frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial \dot{q}^{\hat{m}}}$ qui est une quantité nulle.

5 Equations hamiltoniennes du mouvement

5.1 A partir d'un hamiltonien canonique

Soit un hamiltonien canonique $\mathcal{H}_c(q,p,t)$ avec p exprimé comme en (27) (on a alors la fonction énergie). Si on évalue la différentielle de $W(q,\dot{q},t) = \mathcal{H}_c(q, p(q,\dot{q},t), t)$, on trouve que :

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial p_\alpha} + u^m \frac{\partial \phi_m^{(1)}}{\partial p_\alpha} \tag{51}$$

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial q^\alpha} - u^m \frac{\partial \phi_m^{(1)}}{\partial q^\alpha} \tag{52}$$

$$\phi_m^{(1)}(q,p,t) = 0 \tag{53}$$

Ces équations peuvent se réécrire sous forme d'égalités faibles :

$$\dot{q}^\alpha \approx \{q^\alpha, \mathcal{H}_c + u^m \phi_m^{(1)}\} \tag{54}$$

$$\dot{p}_\alpha \approx \{p_\alpha, \mathcal{H}_c + u^m \phi_m^{(1)}\} \tag{55}$$

5.2 Des équations d'Euler-Lagrange

Il est possible de retrouver les équations du mouvement à partir du lagrangien $L(q, \dot{q}, t)$ et en prenant comme variables indépendantes $(q^\alpha, p_a, \dot{q}^{\hat{m}}, t)$. A partir de l'hamiltonien canonique (50), on trouve directement, en réalisant les dérivées partielles et avec $\dot{q}^{\hat{a}} = h^{\hat{a}}(q^\alpha, p_a, \dot{q}^{\hat{m}}, t)$:

$$\frac{\partial \mathcal{H}_c(q, p_b, t)}{\partial p_a} = \dot{q}^a - \dot{q}^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_a} \tag{56}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_c(q, p_b, t)}{\partial p_n} = \dot{q}^n - \dot{q}^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n} = 0 \tag{57}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_c(q, p_b, t)}{\partial q^\alpha} = -\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q^\alpha}\Big|_{\dot{q}^{\hat{a}} = h^{\hat{a}}} - \dot{q}^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^\alpha} \tag{58}$$

On voit ainsi que les multiplicateurs u^m des équations de la section ci-dessus correspondent aux vélocités $\dot{q}^m$ indépendantes. On peut exprimer les vélocités et moments en termes de $(q^\alpha, p_a, \dot{q}^m, t)$:

$$\dot{q}^\alpha(q, p_a, \dot{q}^m, t) = \frac{\partial \mathcal{H}_c(q, p_b, t)}{\partial p_\alpha} + \dot{q}^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_\alpha} \tag{59}$$

$$\frac{dp_a}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}_c(q, p_b, t)}{\partial q^a} + \dot{q}^m \frac{\partial f_m}{\partial q^a} \tag{60}$$

$$\frac{df_m}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}_c(q, p_b, t)}{\partial q^m} + \dot{q}^n \frac{\partial f_n}{\partial q^m} \tag{61}$$

5.3 Hamiltonien total et équivalence entre formalisme hamiltonien et lagrangien

Il est très utile d'introduire ce que l'on appelle l'*hamiltonien total* défini par :

$$\mathcal{H}_T(q^\alpha, p_\beta, u^m, t) := \mathcal{H}_c(q^\alpha, p_a, t) + \phi_m(q^\alpha, p_\beta, t) u^m \tag{62}$$

Cet hamiltonien est introduit pour décrire la dynamique hamiltonienne de façon plus compacte :

$$\frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial p_\alpha}\Big|_{\mathcal{V}} = \dot{q}^\alpha \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial q^\alpha}\Big|_{\mathcal{V}} = -\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q^\alpha} \tag{63}$$

La dérivée totale d'une fonction $F(p, q, t)$ sur la surface des contraintes primaires est donc, sous forme de crochets de Poisson :

$$\frac{dF}{dt} \approx \{F, \mathcal{H}_T\} + \frac{\partial F}{\partial t} + c^m \phi_m \approx \{F, \mathcal{H}_T\} + \frac{\partial F}{\partial t} \qquad on-shell \tag{64}$$

En outre, sur la surface des contraintes primaires $\mathcal{V}$ également, l'hamiltonien total est égal à l'hamiltonien canonique :

$$\mathcal{H}_T \approx \mathcal{H}_c \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial u^m} \approx 0 \tag{65}$$

A partir d'un hamiltonien total, on peut montrer qu'il y a équivalence entre les formalismes hamiltonien et lagrangien.

Partons d'un hamiltonien $H_c(p, q, t)$ dans l'espace des phases à $2N$ dimensions. Donnons-nous $\mathcal{M}$ contraintes arbitraires ϕ_m indépendantes ; cela nous permet d'introduire $\mathcal{M}$ variables u^m indépendantes et aussi de dire que $\mathcal{M}$ moments dans l'espace des phases sont données par $p_m = f_m(q^\alpha, p_b, t)$.

L'hamiltonien total est défini comme en (62). Le principe d'action est tiré de l'action :

$$S[q^\alpha, p_\beta, u^l, t] = \int dt \big(p_\alpha q^\alpha - \mathcal{H}_T\big) \tag{66}$$

Ce qui mène aux équations d'évolution des variables de positions :

$$\dot{q}^\alpha(q, p_a, u^l, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial p_\alpha}\Big|_{\mathcal{V}} \tag{67}$$

Si on suppose qu'il est possible d'exprimer les variables de l'espace des phases en fonction des positions et vitesses

$$p_a = p_a(q, \dot{q}, t) \quad ; \quad p_m = f_m(q, p_a(q, \dot{q}, t), t) \quad ; \quad u^m = u^m(q, \dot{q}, t) \tag{68}$$

Alors, on peut définir le lagrangien :

$$L(q, \dot{q}, t) := \left(\dot{q}^\alpha p_\alpha - \mathcal{H}_c(p, q, t)\right)\Big|_{\mathcal{V}} = \left(\dot{q}^\alpha p_\alpha - \mathcal{H}_T(p, q, u, t)\right)\Big|_{\mathcal{V}} \tag{69}$$

La dynamique lagrangienne est ainsi obtenue :

$$\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}^\alpha} = \left(p_\alpha + \dot{q}^\beta \frac{\partial p_\beta}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial p_\beta}{\partial \dot{q}^\alpha}\frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial p_\beta}\right)\Big|_{\mathcal{V}} = p_\alpha(q, \dot{q}, t) \tag{70}$$

$$\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q^\alpha} = \left(\frac{\partial p_\beta}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\beta - \frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial p_\beta}\frac{\partial p_\beta}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial q^\alpha}\right)\Big|_{\mathcal{V}} = -\frac{\partial \mathcal{H}_T(p, q, u, t)}{\partial q^\alpha}\Big)\Big|_{\mathcal{V}} \tag{71}$$

$$p_m = f_m(q, p_a(q, \dot{q}, t), t) \tag{72}$$

Cela montre l'équivalence entre le formalisme hamiltonien et le formalisme lagrangien, avec pour hypothèse le fait qu'il est possible d'écrire (68) (le terme adéquat est : on suppose l'existence d'une carte inverse $(q^\alpha, \dot{q}^\beta) \to (q^\alpha, p_b, u^m)$).

6 Cohérence des équations

6.1 Contraintes secondaires

Les contraintes primaires (28) devant être préservées au cours de l'évolution du système, les vecteurs définis par les équations du mouvement doivent être partout tangents à la surface $\mathcal{V}$ et à chaque instant. La préservation des contraintes primaires se traduit par :

$$\dot{\phi}_m^{(1)} \approx 0 \quad ou \quad \{\phi_m^{(1)}, \mathcal{H}_T\} + \partial_t \phi_m^{(1)} \approx 0 \tag{73}$$

Il se peut alors que de nouvelles contraintes apparaissent. On les appelle *contraintes secondaires*. Ces dernières devant être également préservées, il se peut qu'elles fournissent des contraintes tertiaires, elles-mêmes pouvant donner des contraintes quaternaires, et ainsi de suite. Toutes ces nouvelles contraintes (il y en a $\mathcal{K}$) sont notées $\phi_{m'}^{(2)}$ où $m' \in \{\mathcal{M}+1, ..., \mathcal{M}+\mathcal{K}\}$. Le mouvement a donc finalement lieu sur une surface des contraintes $\mathcal{S}$ de dimension $2N - \mathcal{M} - \mathcal{K}$.

6.2 développement de l'hamiltonien total et hamiltonien de première classe

Nous notons :

$$\tilde{\phi}_A(q, p) = 0 \quad A \in \{1, ..., \mathcal{M}+\mathcal{K}\} \tag{74}$$

l'ensemble de toutes les contraintes. Elles vérifient par définition le système de $\mathcal{M}+\mathcal{K}$ équations

$$\{\tilde{\phi}_A, \mathcal{H}_c\} + u^m\{\tilde{\phi}_A, \phi_m^{(1)}\} + \partial_t \tilde{\phi}_A \approx 0 \tag{75}$$

à $\mathcal{M}$ inconnues u^m.

La solution générale de ce système est :

$$u^m = \overline{u}^m(q, p, t) + \lambda^i(t) U_{(i)}^m(q, p, t) \tag{76}$$

Où $\overline{u}^m$ est une solution particulière de l'équation (75), les λ^i sont des fonctions arbitraires du temps et les $U_{(i)}^m(q, p)$ sont des solutions de l'équation homogène, donc elles vérifient :

$$U_{(i)}^m\{\tilde{\phi}_A, \phi_m^{(1)}\} \approx 0 \quad i \in \{1, ..., r \leq \mathcal{M}\} \tag{77}$$

L'indice i ne parcourt qu'une partie des contraintes primaires, à savoir les contraintes primaires ET de première classe. La définition de première classe sera spécifiée par la suite.

A partir d'un hamiltonien canonique $\mathcal{H}_c$ choisi et d'une solution particulière $\overline{u}^m(q,p,t)$, on peut construire l'*hamiltonien total* :

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_c + \overline{u}^m \phi_m^{(1)} + \lambda^i U_{(i)}^m \phi_m^{(1)} \tag{78}$$

qui dépend de r fonctions arbitraires $\lambda^i(t)$.

On définit également les r fonctions

$$\gamma_{(i)}^{(1)} = U_i^m \phi_m^{(1)} \tag{79}$$

Et on introduit le symbole " $\asymp$ " qui traduit une égalité faible sur la surface de toutes les contraintes $\mathcal{S}$. L'égalité $G \asymp R$ est ainsi une égalité modulo les contraintes primaires et secondaires. On peut parler, pour faire la différence avec l'égalité faible, d'égalité " très " faible entre G et R. Les fonctions (79) sont telles que :

$$\{\tilde{\phi}_A, \gamma_i^{(1)}\} \asymp 0 \tag{80}$$

Ces fonctions sont dites de *première classe*. Par définition, une fonction de première classe est une fonction dont le crochet de Poisson avec toutes les contraintes est "très" faiblement nul. Les fonctions qui ne vérifient pas cette propriétés sont dites de *deuxième classe*.

Ainsi, l'hamiltonien total correspond à la somme d'un *hamiltonien de première classe*

$$\mathcal{H}_P = \mathcal{H}_c + \overline{u}^m \phi_m^{(1)} \tag{81}$$

et d'une combinaison arbitraire de r contraintes primaires de première classe.

Il est à noter que le crochet de Poisson de deux fonctions de première classe reste une fonction de première classe (cela se prouve en utilisant l'identité de Jacobi) et, si $\mathcal{H}_P$ ainsi que toutes les contraintes de premières classe ne dépendent pas explicitement du temps, alors le crochet de Poisson de la dérivée d'une contrainte de première classe avec une contrainte de première classe reste une fonction de première classe. Aussi, on peut montrer que la restriction sur $\mathcal{S}$ et la dérivée sont deux opérations qui commutent :

$$\frac{d}{dt}\Big(F(p,q,t)\big|_{\mathcal{S}}\Big) = \big(\frac{d}{dt}F(p,q,t)\big)\Big|_{\mathcal{S}} \tag{82}$$

Dès lors que les contraintes secondaires, tertiaires,... sont toutes bien définies, on peut généraliser l'hamiltonien total en additionnant à (62) des termes quadratiques en les contraintes.

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_c + \overline{u}^m \phi_m^{(1)} + \frac{1}{2}\phi_h \phi_{h'} w^{hh'} = \mathcal{H}_P + \lambda^i \gamma_i^{(1)} + \frac{1}{2}\phi_h \phi_{h'} w^{hh'} \tag{83}$$

Où h, h' parcourent toutes les contraintes ; $1 \leq h, h' \leq \mathcal{M} + \mathcal{K}$. Cette "nouvelle" définition de l'hamiltonien total ne modifie en rien les équations du mouvements, le mouvement ayant lieu désormais sur $\mathcal{S}$, là où toutes les contraintes s'annulent.

De par le fait que :

$$\{\phi_h, \mathcal{H}_P\} \asymp \{\phi_h, \mathcal{H}_T\} \asymp \dot{\phi}_h\Big|_{\mathcal{S}} - \frac{\partial \phi_h}{\partial t} \asymp -\frac{\partial \phi_h}{\partial t} \tag{84}$$

On comprend que $\mathcal{H}_P$ et $\mathcal{H}_T$ sont tous les deux de première classe si les contraintes ne dépendent pas explicitement du temps.

7 Transformations de jauge

7.1 Transformations infinitésimales

On rappelle les équations du mouvement (63) sous forme de crochets de Poisson :

$$\dot{q}^\alpha \approx \{q^\alpha, \mathcal{H}_T\} \approx \{q^\alpha, \mathcal{H}_P\} + \lambda^i(t)\{q^\alpha, \gamma_i^{(1)}\} \tag{85}$$

$$\dot{p}_\alpha \approx \{p_\alpha, \mathcal{H}_T\} \approx \{p_\alpha, \mathcal{H}_P\} + \lambda^i(t)\{p_\alpha, \gamma_i^{(1)}\} \tag{86}$$

On note que r fonction arbitraires λ^i apparaissent dans l'expression de $\mathcal{H}_T$. Les solutions des équations du mouvement correspondant à deux choix différents de ces fonctions arbitraires doivent être identifiés.

Les fonctions λ^i sont dites *fonctions de jauge* et un choix particulier de la fonction constitue une *fixation de la jauge*. Dès lors, les transformations résultant des choix différents des fonctions λ^i sont dites *transformations de jauge* du système dynamique. Une transformation de jauge correspond donc à une transformation du système lorqu'on passe de la jauge λ^i à une autre $\lambda^i + \delta\lambda^i$.

Considérons un système représenté, au temps t_0, par le point de coordonnées $(q^\alpha(t_0), p^\alpha(t_0))$. A l'instant $t_0 + \epsilon$, où ϵ est infinitésimal, le système est représenté, dans la jauge λ_*^i par le point de coordonnées :

$$q_*^\alpha(t_0 + \epsilon) = q^\alpha(t_0) + \epsilon(\{q^\alpha, \mathcal{H}_P\} + \lambda_*^i\{q^\alpha, \gamma_{(i)}^{(1)}\})\big|_{q(t_0),p(t_0)} \tag{87}$$

$$p_*^\alpha(t_0 + \epsilon) = p^\alpha(t_0) + \epsilon(\{p^\alpha, \mathcal{H}_P\} + \lambda_*^i\{p^\alpha, \gamma_{(i)}^{(1)}\})\big|_{q(t_0),p(t_0)} \tag{88}$$

Dans la jauge voisine $\lambda_{\bar{*}}^i = \lambda_*^i + \delta\lambda^i$, on aurait :

$$q_{\bar{*}}^\alpha(t_0 + \epsilon) = q^\alpha(t_0) + \epsilon(\{q^\alpha, \mathcal{H}_P\} + (\lambda_*^i + \delta\lambda^i)\{q^\alpha, \gamma_{(i)}^{(1)}\})\big|_{q(t_0),p(t_0)} \tag{89}$$

$$= q_*^\alpha(t_0 + \epsilon) + \epsilon\delta\lambda^i\{q^\alpha, \gamma_{(i)}^{(1)}\}\big|_{q(t_0),p(t_0)} \tag{90}$$

$$p_{\bar{*}}^\alpha(t_0 + \epsilon) = p_*^\alpha(t_0 + \epsilon) + \epsilon\delta\lambda^i\{p^\alpha, \gamma_{(i)}^{(1)}\}\big|_{q(t_0),p(t_0)} \tag{91}$$

Lors d'une transformation de jauge, on a donc que la transformation canonique infinitésimale est générée par la fonction $\delta\lambda^i\gamma_{(i)}^{(1)}$

$$\delta_{jauge}q^\alpha = \epsilon\delta\lambda^i\{q^\alpha, \gamma_{(i)}^{(1)}\} \tag{92}$$

$$\delta_{jauge}p^\alpha = \epsilon\delta\lambda^i\{p^\alpha, \gamma_{(i)}^{(1)}\} \tag{93}$$

De façon générale, tous les points de l'espace des phases pouvant être transformés l'un dans l'autre par des transformations canoniques engendrées par des contraintes primaires de première classe sont physiquement équivalents. On dit qu'ils sont *équivalents de jauge*. Etant donné que deux choix de jauge différents permettent tout de même de décrire la même physique, la présence des fonctions arbitraires dans l'hamiltonien total induit que l'espace des phases contient des degrés de liberté non physiques. En effet deux choix différents de fonctions arbitraires, λ_1^i et λ_2^i, forment deux hamiltoniens totaux distincts et donc conduisent à deux évolutions différentes d'une variable Z au cours du temps. $\delta Z = \{Z, \gamma_i^{(1)}\}(\lambda_2^i - \lambda_1^i)\delta t$. Il n'empêche que ces deux jauges, bien que distinctes, décrivent la même physique ; il y a symétrie de jauge.

7.2 Générateurs de symétrie de jauge

Les crochets de Poisson des contraintes primaires de première classe avec l'hamiltonien de première classe possèdent la particularité d'être générateurs de transformation de jauge.
Pour montrer cela, considérons d'abord l'évolution dans le temps d'une variable Z pendant un temps δt_1 décrite par l'hamiltonien total $\mathcal{H}_T$, c'est-à-dire sans fixer la jauge. Par après, l'évolution temporelle

est dictée par l'hamiltonien de première classe $\mathcal{H}_P$, c'est-à-dire en fixant complètement la jauge, et a lieu pendant un temps δt_2. La variable Z évolue ainsi de la sorte :

$$Z(t_0 + \delta t_1 + \delta t_2) = Z_0 + \{Z_0 + \{Z, \mathcal{H}_T\}\delta t_1, \mathcal{H}_P\}\delta t_2 \tag{94}$$

$$= \delta t_2 \delta t_1 \Big(\{\{Z, \mathcal{H}_P\}, \mathcal{H}_P\} + \{\{Z, \gamma_i^{(1)}\}\lambda^i, \mathcal{H}_P\} \Big) \tag{95}$$

Considérons ensuite les mêmes opérations d'évolution dans le temps de cette variable mais dans l'ordre inverse : d'abord Z évolue avec $\mathcal{H}_P$ pendant un temps δt_2, puis avec $\mathcal{H}_T$ pendant un temps δt_1.

$$\tilde{Z}(t_0 + \delta t_1 + \delta t_2) = Z_0 + \{Z_0 + \{Z, \mathcal{H}_P\}\delta t_2, \mathcal{H}_T\}\delta t_1 \tag{96}$$

$$= \delta t_2 \delta t_1 \Big(\{\{Z, \mathcal{H}_P\}, \mathcal{H}_P\} + \{\{Z, \mathcal{H}_P\}, \gamma_i^{(1)}\}\lambda^i \Big) \tag{97}$$

Les deux hamiltoniens décrivant la même évolution des états physiques mais dans des jauges différentes, les variables Z et $\tilde{Z}$ à l'instant $t_0 + \delta t_1 + \delta t_2$ sont équivalentes de jauge. D'où la différence entre Z et $\tilde{Z}$ est une transformation de jauge. Par usage de l'identité de Jacobi, l'évaluation de la différence des variables Z et $\tilde{Z}$ montre que le crochet des contraintes primaires de premières classe avec l'hamiltonien de première classe est un générateur de transformations de symétrie de jauge.

$$(\tilde{Z} - Z)(t_0 + \delta t_1 + \delta t_2) = \delta t_1 \delta t_2 \Big[\{\{Z, \mathcal{H}_P\}, \gamma_i^{(1)}\}\lambda^i - \{\{Z, \gamma_i^{(1)}\}\lambda^i, \mathcal{H}_P\} \Big] \tag{98}$$

$$= \delta t_1 \delta t_2 \lambda^i \Big[- \{\gamma_i^{(1)}, \{Z, \mathcal{H}_P\}\} + \{\mathcal{H}_P, \{Z, \gamma_i^{(1)}\}\} \Big] \tag{99}$$

$$\equiv \delta t_1 \delta t_2 \lambda^i \{Z, \{\mathcal{H}_P, \gamma_i^{(1)}\}\} \tag{100}$$

On peut également montrer que les crochets de Poisson impliquant les contraintes primaires de première classe et une autre contrainte de première classe ou l'hamiltonien $\mathcal{H}_P$ sont des générateurs de symétrie de jauge via l'introduction d'opérateurs formés à partir des transformations de jauge infinitésimales. On déduit de (93) la transformation de jauge finie fournie par

$$T[\epsilon^i(t)] = e^{\epsilon^i \hat{\gamma}_{(i)}^{(1)}} \tag{101}$$

opérateur généré par $\epsilon^i \gamma_{(i)}^{(1)}$.[1]

Les contraintes de première classe $\gamma_{(i)}^{(1)}$ constituent des générateurs infinitésimaux de transformations de jauge, et ils ne sont pas les seuls générateurs de telles transformations. De fait, ils définissent une algèbre qui nous mène à considérer que d'autres contraintes peuvent former des générateurs de transformations de jauge. On en déduit que le crochet de Poisson de deux contraintes primaires de première classe constitue un générateur infinitésimal de transformations de jauge. On peut montrer cela en considérant la suite de transformations

$$T[-\epsilon^i]T[-\eta^i]T[\epsilon^i]T[\eta^i] = \mathcal{T} \tag{102}$$

que l'on applique à une coordonnée quelconque Z lorsque η^i et ϵ^i sont infinitésimaux :

$$\mathcal{T}(Z) = T[-\epsilon^i]T[-\eta^i]T[\epsilon^i] \Big(Z + \eta^i \{Z, \gamma_i^{(1)}\} + \frac{1}{2}\eta^i \eta^j \{\{Z, \gamma_i^{(1)}\}, \gamma_j^{(1)}\} \Big) \tag{103}$$

$$= T[-\epsilon^i]T[-\eta^i] \Big(Z + (\epsilon^i + \eta^i)\{Z, \gamma_i^{(1)}\} + \frac{1}{2}(\eta^i \eta^j + 2\epsilon^j \eta^i + \epsilon^j \epsilon^i)\{\{Z, \gamma_i^{(1)}\}, \gamma_j^{(1)}\} \Big) \tag{104}$$

$$= .... \tag{105}$$

$$= Z + \epsilon^j \eta^i \Big(\{\{Z, \gamma_i^{(1)}\}, \gamma_j^{(1)}\} - \{\{Z, \gamma_j^{(1)}\}, \gamma_i^{(1)}\} \Big) \tag{106}$$

$$= Z + \epsilon^j \eta^i \{Z, \{\gamma_{(j)}^{(1)}, \gamma_{(i)}^{(1)}\}\} \tag{107}$$

Les générateurs $\{\gamma_{(i)}^{(1)}, \mathcal{H}_P\}$ font souvent apparaître des contraintes secondaires de première classe comme générateurs de transformations de jauge.

1. Soit Z une coordonnées quelconque, l'opérateur $\hat{\gamma}_{(i)}^{(1)}$ agit sur Z de la sorte : $\hat{\gamma}_{(i)}^{(1)}(Z) = \{Z, \gamma_{(i)}^{(1)}\}$

On peut alors penser qu'une contrainte de première classe, quelqu'elle soit, est génératrice de transformations symétrie de jauge. La conjecture de Dirac postule d'ailleurs que toutes les $\mathcal{D}$ contraintes de première classe, notées γ_I, sont des générateurs de transformations de jauge. Cela n'est en fait pas toujours vrai, mais il se trouve que les systèmes physiquement intéressants vérifient cette conjecture. Dans ce cas (dans le cas où la conjecture est vérifiée), l'évolution du système calculée à partir de l'hamiltonien total $\mathcal{H}_T$ est équivalente à celle calculée à partir de ce qu'on appelle l'*hamiltonien étendu* $\mathcal{H}_E$:

$$\mathcal{H}_E = \mathcal{H}_P + \lambda^I \gamma_I = \mathcal{H}_T + \lambda^s(t)\gamma_s^{(2)} \quad I = 1, ..., \mathcal{D} \tag{108}$$

s parcourant toutes les contraintes secondaires de première classe.

7.3 Exemples : systèmes contredisant la conjecture de Dirac

- Voici un système qui ne vérifie pas la conjecture de Dirac :

$$L = (\dot{x}\dot{z} + \frac{1}{2}yz^2) \tag{109}$$

On peut montrer que les contraintes secondaires de première classe ne sont pas des générateurs de transformations de jauge ; seule la contrainte primaire de première classe (il s'agit de $\phi_1^{(1)} = p_y$) est un tel générateur, et on a ainsi que la variable conjuguée à p_y, càd y, suit une évolution arbitraire. Dès lors, les solutions du mouvement sont différentes si on emploie l'hamiltonien étendu plutôt que l'hamiltonien total : ces deux hamiltoniens ne sont pas équivalents.

- Un autre hamiltonien qui ne vérifie pas la conjecture de Dirac est le suivant :

$$\mathcal{H}_c(q, \mu, \nu, \lambda, p, \pi_\mu, \pi_\nu, \pi_\lambda) = e^\lambda q^2 + e^{-\mu}p^2 + \pi_\nu^2 + q\pi_\nu \tag{110}$$

où p est la variable conjuguée à q, et π_i est la variable conjuguée à i.

Les contraintes primaires sont :

$$\phi_1 = \pi_\lambda \approx 0 \tag{111}$$
$$\phi_2 = \pi_\mu \approx 0 \tag{112}$$

Et donc

$$\mathcal{H}_T = e^\lambda q^2 + e^{-\mu}p^2 + \pi_\nu^2 + q\pi_\nu + u^1\pi_\lambda + u^2\pi_\mu \tag{113}$$

De ces contraintes primaires, on trouve les contraintes secondaires :

$$\{\pi_\lambda, \mathcal{H}_T\} = q^2 e^\lambda \Rightarrow \phi_3 = q \approx 0 \tag{114}$$
$$\{\pi_\mu, \mathcal{H}_T\} = e^{-\mu}p^2 \Rightarrow \phi_4 = p \approx 0 \tag{115}$$

Ces nouvelles contraintes fournissent elles-mêmes une contrainte tertiaire :

$$\{q, \mathcal{H}_T\} = 2pe^{-\mu} \Rightarrow p \approx 0 \ \ (rien \ \ de \ \ neuf) \tag{116}$$
$$\{p, \mathcal{H}_T\} = 2qe^\lambda + \pi_\nu \Rightarrow \phi_5 = \pi_\nu \approx 0 \tag{117}$$

Comme $\{\pi_\nu, \mathcal{H}_T\} = 0$, il n'y a pas de contraintes d'ordre supérieur à 3.

On a que ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_5 sont des contraintes de première classe tandis que ϕ_3 et ϕ_4 sont de seconde classe et ne sont donc pas des générateurs de transformations de jauge.

Aussi, ϕ_1 et ϕ_2 sont des générateurs de transformations de jauge, mais leur crochet de Poisson avec l'hamiltonien de première classe $\mathcal{H}_P = e^\lambda q^2 + e^{-\mu}p^2 + \pi_\nu^2 + q\pi_\nu + \overline{u}^1\pi_\lambda + \overline{u}^2\pi_\mu$ ne permet pas de dire que ϕ_5 en est un :

$$\{\pi_\lambda, \mathcal{H}_P\} = 0 \tag{118}$$
$$\{\pi_\mu, \mathcal{H}_P\} = e^{-\mu}p^2 \tag{119}$$

Ici, ϕ_5 n'est pas un générateur de transformations de jauge bien que cette contrainte soit de première classe. Plus tard, nous verrons les critères exactes que doit avoir une quantité $\mathcal{Q}$ pour être générateur de symétrie. La conjecture de Dirac n'est pas vérifiée dans ce cas et la solution générale du système obtenue avec l'hamiltonien étendu $\mathcal{H}_E = \mathcal{H}_P + \lambda^1\phi_1 + \lambda^2\phi_2 + \lambda^5\phi_5$ fournit davantage de fonctions arbitraires que la solution obtenue via l'hamiltonien total. De fait, dans les équations du mouvement obtenu via $\mathcal{H}_E$, on aurait l'équation supplémentaire $\dot{\nu} = -2\pi_\nu - q - \lambda^5$ rendant $\nu(t)$ arbitraire.

8 Contraintes de seconde classe

8.1 Crochet de Dirac

Supposons que nous ayons trouvé toutes les $\mathcal{M} + \mathcal{K}$ contraintes $\tilde{\phi_A}$ du système. Parmi elles, on en compte M qui sont de première classe, on les note γ_I, et P qui sont de seconde classe, on les note χ_u. Les M contraintes de première classe s'obtiennent à partir des M solutions $\tilde{U}^A_{(I)}$ du système d'équations linéaires homogènes :

$$U^A\{\tilde{\phi_A}, \tilde{\phi_B}\} \asymp 0 \qquad (120)$$

De ces solutions, on forme

$$\gamma_I = \tilde{U}^A_{(I)}\tilde{\phi_A} \qquad (121)$$

Cette décomposition n'est pas unique et il est possible de redéfinir les contraintes :

$$\gamma_I \to A^J_I\gamma_J + S^{uv}_I\chi_u\chi_v \quad det(A) \neq 0 \qquad (122)$$

$$\chi_u \to B^v_u\chi_u + R^J_u\gamma_I \quad det(B) \neq 0 \qquad (123)$$

Les contraintes de première classe restent de première classe et celles de seconde classe restent de seconde classe en effectuant cette redéfinition.

Un objet fondamental à l'étude de la variété des contraintes de seconde classe est la matrice $P \times P$ C antisymétrique de composantes

$$C_{uv} = \{\chi_u, \chi_v\} \qquad (124)$$

Cette matrice est inversible, sinon il existerait une nouvelle contrainte dans le système (or on suppose qu'on a trouvé toutes les contraintes). Une conséquence des propriétés d'inversibilité et d'antisymétrie est que le nombre de contraintes de seconde classe doit être pair.En effet, :

$$det(C) = det(C^t) = (-1)^P det(C) \qquad (125)$$

Etant donné que $det(C) \neq 0$ (car inversibilité), il est nécessaire que $(-1)^P = 1$, autrement dit, P est pair.

Soit $\tilde{\Sigma}$ la surface engendrée par les contraintes χ_u. Cette surface est de dimension $2\overline{s} = 2N - P$.

Les $2\overline{s}$ coordonnées sur $\tilde{\Sigma}$ seront notées x^a et les équations qui définissent la surface $\tilde{\Sigma}$ s'écrivent paramétriquement comme :

$$z^A = S^A(x^a) \quad z^A = (q^\alpha, p_\beta) \qquad (126)$$

Elles vérifient :

$$\chi_u[S^A(x^a)] \equiv 0 \qquad (127)$$

Les conditions de régularités étant supposées satisfaites, un vecteur de composantes $\tilde{X}^A$ est tangent à la surface si :

$$\tilde{X}^A\frac{\partial\chi_u}{\partial z^A} \approx 0 \qquad (128)$$

En dérivant par rapport à x^a (127), on trouve que les composantes de ces vecteurs tangents sont :

$$\tilde{X}^A = \frac{\partial S^A}{\partial x^a}X^a \qquad (129)$$

En se rappelant la 2-forme symplectique w

$$w^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & \delta^{A,B-N} \\ -\delta^{A-N,B} & 0 \end{pmatrix} \tag{130}$$

et en restreignant l'action de cette 2-forme aux vecteurs tangents à $\tilde{\Sigma}$, on peut construire la 2-forme induite σ :

$$\sigma_{ab} = \frac{\partial S^A}{\partial x^a}\frac{\partial S^B}{\partial x^b} w^{AB} \tag{131}$$

Ces relatons (131) définissant σ sont équivalentes à

$$X^a X^b \sigma_{ab} = \tilde{X}^A \tilde{X}^B w_{AB} \tag{132}$$

Cette 2-forme σ permet de définir le *crochet de Poisson induit* $\{,\}_*$ de deux fonctions f et g définies sur $\tilde{\Sigma}$:

$$\{f,g\}_* = \frac{\partial f}{\partial x^a}\frac{\partial g}{\partial x^b}\sigma^{ab} \tag{133}$$

La 2-forme σ a été construite à partir du crochet de Poisson sur l'espace des phases et des équations qui définissent $\tilde{\Sigma}$. Soit alors F et G deux fonctions qui se restreignent à f et g respectivement sur la surface $\tilde{\Sigma}$, il est possible de directement calculer la valeur du crochet (133) à partir de la donnée de représentants des fonctions F et G au voisinage de $\tilde{\Sigma}$:

$$\{f,g\}_* = \frac{\partial F}{\partial z^A}\frac{\partial G}{\partial z^B}\frac{\partial S^A}{\partial x^a}\frac{\partial S^B}{\partial x^b}\sigma^{ab} \tag{134}$$

On définit alors le tenseur antisymétrique

$$\Delta^{AB} = \frac{\partial S^A}{\partial x^a}\frac{\partial S^B}{\partial x^b}\sigma^{ab} \tag{135}$$

qu'on exprime en coordonnées z^A.

Ce tenseur vérifie les relations suivantes :

$$\Delta^{AB} w_{BC}\frac{\partial S^C}{\partial x^c} = \frac{\partial S^A}{\partial x^c} \tag{136}$$

$$\Delta^{AB}\frac{\partial \chi_u}{\partial z^B} = 0 \tag{137}$$

La première relation nous permettant d'établir :

$$\Delta^{AB} = w^{AB} + P^{Av}\frac{\partial \chi_v}{\partial z^C} w^{CB} \tag{138}$$

ce qui, au moyen de la deuxième relation de (137), nous mène à :

$$w^{AB}\frac{\partial \chi_u}{\partial z^B} = -P^{Av}\{\chi_v,\chi_u\} = -P^{Av}C_{vu} \tag{139}$$

Et donc :

$$\Delta^{AB} = w^{AB} - w^{AD}\frac{\partial \chi_u}{\partial z^D}(C^{-1})^{uv}\frac{\partial \chi_v}{\partial z^C} w^{CB} \tag{140}$$

Cela nous permet d'introduire sur l'espace des phases un nouveau crochet : *le crochet de Dirac* $\{,\}_D$:

$$\{F,G\}_D = \frac{\partial F}{\partial z^A}\frac{\partial G}{\partial z^B}\Delta^{AB} \tag{141}$$

$$= \{F,G\} - \{F,\chi_u\}(C^{-1})^{uv}\{\chi_v,G\} \tag{142}$$

Ce crochet vérifie bien toutes les propriétés qu'on attend d'un crochet : antisymétrie, bilinéarité, vérifie la règle de Leibniz, l'identité de Jacobi,...

Le crochet de Dirac possède des propriétes intéressantes :

1. Si F est de première classe et G quelconque :

$$\{F,G\}_D \asymp \{F,G\} \tag{143}$$

2. Le crochet s'annule sur les contraintes de seconde classe :

$$\{F,\chi_u\}_D \simeq 0 \tag{144}$$

$\simeq$ signifiant « *égal sur la surface des contraintes de seconde classe de dimension* $2N-P$ »

Si l'on utilise le crochet de Dirac plutôt que le crochet de Poisson, on peut, en chaque point $\tilde{z}^A$ remplacer les contraintes de seconde classe $\chi_u(z^A)$ par la valeur $\chi_u(\tilde{z}^A)$. Ainsi, sur $\tilde{\Sigma}$, on peut les poser égales à zéro avant d'entamer le calcul des crochets de Dirac.

8.2 Exemple

Considérons à nouveau l'hamiltonien (110). La surface des contraintes secondaires est définie par les deux contraintes

$$\phi_3 = q \approx 0 \qquad \phi_4 = p \approx 0 \tag{145}$$

La matrice C correspondant à ces contraintes est :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -C^{-1} \tag{146}$$

L'espace des phases étant de huit dimensions (composé des variables $q,\mu,\nu,\lambda,p,\pi_\mu,\pi_\nu,\pi_\lambda$), la surface engendrée par les contraintes est, elle, de six dimensions et les coordonnées de $\tilde{\Sigma}$ sont $\mu,\nu,\lambda,\pi_\mu,\pi_\nu,\pi_\lambda$. On a les relations pour $S^A(x^a)$:

$$S^1 = 0 \ ; \ S^2 = \mu \ ; \ S^3 = \nu \ ; \ S^4 = \lambda \ ; \ S^5 = 0 \ ; \ S^6 = \pi_\mu \ ; \ S^7 = \pi_\nu \ ; \ S^8 = \pi_\lambda \tag{147}$$

On construit la 2-forme σ via la relation (131) :

$$\sigma_{ab} = \delta_a^A \delta_b^B w^{AB} \Rightarrow \underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{148}$$

Il en résulte le crochet de Poisson induit (133) :

$$\{f,g\}_* = \frac{\partial f}{\partial \mu}\frac{\partial g}{\partial \pi_\mu} + \frac{\partial f}{\partial \nu}\frac{\partial g}{\partial \pi_\nu} + \frac{\partial f}{\partial \lambda}\frac{\partial g}{\partial \pi_\lambda} - \frac{\partial g}{\partial \mu}\frac{\partial f}{\partial \pi_\mu} - \frac{\partial g}{\partial \nu}\frac{\partial f}{\partial \pi_\nu} - \frac{\partial g}{\partial \lambda}\frac{\partial f}{\partial \pi_\lambda} \tag{149}$$

Ayant trouvé σ, on peut déterminer le tenseur Δ (135) :

$$\Delta^{AB} = \delta_a^A \delta_b^B \sigma^{ab} \Rightarrow \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{150}$$

Le crochet de Dirac est ainsi défini :

$$\{F,G\}_D = \frac{\partial F}{\partial \mu}\frac{\partial G}{\partial \pi_\mu} + \frac{\partial F}{\partial \nu}\frac{\partial G}{\partial \pi_\nu} + \frac{\partial F}{\partial \lambda}\frac{\partial G}{\partial \pi_\lambda} - \frac{\partial G}{\partial \mu}\frac{\partial F}{\partial \pi_\mu} - \frac{\partial G}{\partial \nu}\frac{\partial F}{\partial \pi_\nu} - \frac{\partial G}{\partial \lambda}\frac{\partial F}{\partial \pi_\lambda} \tag{151}$$

Et comme $(C^{-1})^{12} = -(C^{-1})^{21} = -1$, la relation (142) est vérifiée.

9 Transformation de jauge de l'action

9.1 Règles de transformations afin de rendre l'action étendue invariante et déterminer les transformations de symétrie de jauge

En considérant une variation par rapport à toutes les variables $q^\alpha, p_\alpha, \lambda^I, u^p$ $(1 \leq p \leq P)$ de l'action étendue, on peut obtenir les équations du mouvement de la mécanique diracienne.

L'action étendue est

$$S_E = \int (p_\alpha \dot{q}^\alpha - \mathcal{H}_P - \lambda^I \gamma_I - u^p \chi_p) dt \tag{152}$$

Imposons à cette action d'être invariante, modulo des termes de bords, lors d'une transformation de jauge infinitésimale engendrée par $\varepsilon^I \gamma_I$. Les contraintes de première classe γ_I sont supposées ne dépendre que des q^α et des p_α tandis que les fonctions ε^I peuvent dépendre du temps, des q^α et des p_α (mais pas de leur dérivée) et des multiplicateurs λ^I et u^p ainsi que de leurs dérivées nième par rapport au temps.

A une dérivée totale par rapport au temps près, on doit avoir :

$$\delta\lambda^I \gamma_I + \delta u^p \chi_p = \delta(p_\alpha \dot{q}^\alpha) - \delta\mathcal{H}_P - \lambda^I \delta\gamma^I - u^p \delta\chi_p \tag{153}$$

Avec

$$\delta_{jauge}(p_\alpha \dot{q}^\alpha) = \{p_\alpha, \varepsilon^I \gamma_I\} \dot{q}^\alpha + p_\alpha \frac{d}{dt}\{q^\alpha, \varepsilon^I \gamma_I\} \tag{154}$$

$$= \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial(\varepsilon^I \gamma_I)}{\partial p_\alpha} p_\alpha - \varepsilon^I \gamma_I\Big) + \frac{D\varepsilon^I}{\partial t} \gamma_I \tag{155}$$

où

$$\frac{D}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{\lambda}^I \frac{\partial}{\partial \lambda^I} + \ddot{\lambda}^I \frac{\partial}{\partial \dot{\lambda}^I} + ... + \dot{u}^p \frac{\partial}{\partial u^p} + \ddot{u}^p \frac{\partial}{\partial \dot{u}^p} \tag{156}$$

Les autres variations infinitésimales de jauge s'écrivent de façon générale (voir (123)) :

$$\delta\mathcal{H}_P = \{\mathcal{H}_P, \varepsilon^I \gamma_I\} = \varepsilon^J (V_J^B \gamma_B + V_J^{mn} \chi_m \chi_n) + \{\mathcal{H}_P, \varepsilon^J\} \gamma_J \tag{157}$$

$$\delta\gamma_I = \{\gamma_I, \varepsilon^I \gamma_I\} = \varepsilon^J (C_{IJ}^K \gamma_K + C_{IJ}^{mn} \chi_m \chi_n + \{\varepsilon^J, \gamma_I\} \gamma_J \tag{158}$$

$$\delta\chi_p = \{\chi_p, \varepsilon^I \gamma_I\} = \varepsilon^J (D_{pJ}^B \gamma_B + E_{pJ}^{mn} \chi_m) + \{\varepsilon^J, \chi_p\} \gamma_J \tag{159}$$

En substituant dans (153), on déduit les règles de transformations des multiplicateurs assurant l'invariance de l'action étendue :

$$\delta\lambda^I = \frac{D\varepsilon^I}{\partial t} + \{\varepsilon^I, \mathcal{H}_E + u^p \chi_p\} - \varepsilon^J (V_J^I + \lambda^K C_{KJ}^I + u^m D_{mJ}^I) \tag{160}$$

$$\delta u^p = -\varepsilon^J (V_J^{mp} \chi_m + \lambda^K C^{mp} K J \chi_m + u^m E_{mJ}^p) \tag{161}$$

L'action totale s'obtient en fixant à zéro certaines des fonctions arbitraires de jauge de façon à ne sommer que sur les contraintes primaires. Cela ne restreint pas la dynamique car on demande que les contraintes primaires restent vérifiées au cours du temps, cela faisant apparaître les contraintes (secondaires) pour lesquelles on n'a plus de multiplicateurs. Pour obtenir les transformations de jauge laissant la dynamique invariante, il faut, avec les équations précédentes, restreindre les fonctions arbitraires de sorte qu'on préserve les conditions imposées aux fonctions de jauge, c'est-à-dire $\delta\lambda^A = \delta u^m = 0$ lorsque les indices A et m ne correspondent pas à une contrainte primaire.

9.2 Exemple

Reprenons le lagrangien de l'exemple introductif

$$L = \frac{1}{2}(x - \dot{y})^2 \tag{162}$$

On rappelle la solution générale du mouvement, obtenue d'abord grâce aux équations d'Euler-Lagrange :

$$x(t) = \dot{\mathcal{F}}(t) \qquad y(t) = \mathcal{F}(t) \tag{163}$$

Passons au formalisme hamiltonien et regardons en premier lieu la transformation de Legendre :

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \;\; et \;\; p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} - x \tag{164}$$

Cela nous permet de déduire la contrainte primaire $\phi^1 = p_x$ et de construire l'hamiltonien canonique ainsi que l'hamiltonien total :

$$\mathcal{H}_c = \frac{1}{2}p_y^2 + p_y x \qquad \mathcal{H}_T = \frac{1}{2}p_y^2 + p_y x + \lambda^x p_x \tag{165}$$

De l'hamiltonien total, on déduit une contrainte secondaire :

$$\{p_x, \mathcal{H}_T\} = p_y \Rightarrow \phi^2 = p_y \asymp 0 \tag{166}$$

$\mathcal{H}_T$ ne dépendant pas de y, il n'y a pas d'autre contrainte. Les deux contraintes du système sont de première classe.

Les équations hamiltoniennes du mouvement sont :

$$\dot{x} = \lambda^x \asymp \lambda^x \quad ; \quad \dot{y} = p_y + x \asymp x \tag{167}$$

$$\dot{p_x} = -p_y \asymp 0 \quad ; \quad \dot{p_y} = 0 \asymp 0 \tag{168}$$

On retrouve comme solutions des relations en accord avec (163) :

$$x(t) = \dot{\mathcal{F}}(t) \;\; ; \;\; y(t) = \mathcal{F}(t) \;\; ; \;\; \lambda^x = \ddot{\mathcal{F}}(t) \;\; ; \;\; p_x = 0 \;\; ; \;\; p_y = 0 \tag{169}$$

L'hamiltonien étendu s'obtient en considérant toutes les contraintes :

$$\mathcal{H}_E = \frac{1}{2}p_y^2 + p_y x + \lambda^x p_x + \lambda^y p_y \tag{170}$$

Les équations qu'il fournit sont :

$$\dot{x} = \lambda^x \quad ; \quad \dot{y} = p_y + x + \lambda^y \tag{171}$$

$$\dot{p_x} = -p_y \quad ; \quad \dot{p_y} = 0 \tag{172}$$

$$p_x = 0 \quad ; \quad p_y = 0 \tag{173}$$

dont les solutions font apparaître une seconde fonction arbitraire $\mathcal{G}(t)$:

$$y = \mathcal{F}(t) \; ; \; \lambda^y = \mathcal{G}(t) \; ; \; x = \dot{\mathcal{F}}(t) - \mathcal{G}(t) \; ; \; \lambda^x = \ddot{\mathcal{F}}(t) - \dot{\mathcal{G}}(t) \; ; \; p_x = 0 \; ; \; p_y = 0 \tag{174}$$

La transformation de jauge la plus générale s'écrit :

$$G = \varepsilon^x p_x + \varepsilon^y p_y \tag{175}$$

ε^x et ε^y étant des fonctions arbitraires de toutes les variables et de leurs dérivées sauf celles de x, y, p_x, p_y. Les transformations de jauge sont :

$$\delta x = \{x, G\} = \frac{\partial \varepsilon^x}{\partial p_x}p_x + \varepsilon^x + \frac{\partial \varepsilon^y}{\partial p_x}p_y \tag{176}$$

$$\delta y = \frac{\partial \varepsilon^x}{\partial p_y}p_x + \varepsilon^y + \frac{\partial \varepsilon^y}{\partial p_y}p_y \tag{177}$$

$$\delta p_x = -\frac{\partial \varepsilon^x}{\partial x}p_x - \frac{\partial \varepsilon^y}{\partial x}p_y \tag{178}$$

$$\delta p_y = -\frac{\partial \varepsilon^x}{\partial y}p_x - \frac{\partial \varepsilon^y}{\partial y}p_y \tag{179}$$

$$\delta \lambda^x = \frac{D\varepsilon^x}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon^x}{\partial x}\lambda^x + \frac{\partial \varepsilon^x}{\partial y}(p_y + x + \lambda^y) - \frac{\partial \varepsilon^x}{\partial p_x}p_y \tag{180}$$

$$\delta \lambda^y = \frac{D\varepsilon^y}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon^y}{\partial x}\lambda^x + \frac{\partial \varepsilon^y}{\partial y}(p_y + x + \lambda^y) - \frac{\partial \varepsilon^y}{\partial p_x}p_y - \varepsilon^x \tag{181}$$

Si l'on veut obtenir les formules analogues dans le cadre du formalisme lagrangien, il faut poser :

$$\lambda^y = 0 \ ; \ \delta\lambda^y = 0 \ ; \ p_x = 0 \ ; \ p_y = \dot{y} - x \ ; \ \lambda^x = \dot{x} \tag{182}$$

La fonction ε^y devient alors $\varepsilon^y(t, x, y, p_x, p_y, \lambda^i, \dot{\lambda}^i, \ddot{\lambda}^i ...) = \varepsilon^y(t, x, y, p_x, p_y(\dot{y}, x), \lambda^x(\dot{x}), \dot{\lambda}^x(\ddot{x}), ...) = E^y(t, x, y, \dot{x}, \ddot{x}, ..., \dot{y})$. La fonction ε^x devient, elle, E^x déterminé par (181) et par le fait que $\delta\lambda^y = 0$:

$$E^x = \frac{D\varepsilon^y}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon^y}{\partial x}\lambda^x + \frac{\partial \varepsilon^y}{\partial y}(p_y + x + \lambda^y) - \frac{\partial \varepsilon^y}{\partial p_x} p_y \Big|_{mod(182)} \tag{183}$$

On a ce qu'il faut pour trouver les transformations infinitésimales de jauge des variables x et y dans le formalisme lagrangien :

$$\delta x = \frac{dE^y}{dt} - (\ddot{y} - \dot{x})\frac{\partial \varepsilon^y}{\partial p_y}\Big|_{mod(182)} \tag{184}$$

$$\delta y = E^y + (\dot{y} - x)\frac{\partial \varepsilon^y}{\partial p_y}\Big|_{mod(182)} \tag{185}$$

Le premier terme de chacune de ces deux transformations correspond bien à la transformation déjà obtenue $\delta x = \dot{f} = \delta \dot{y}$, tandis que les seconds termes sont proportionnels aux équations du mouvement ; ce sont des transformations de jauge triviales et on peut les ignorer. Les secondes termes apportent d'ailleurs une variation du lagrangien qui est une dérivée par rapport au temps :

$$\delta L = \frac{d}{dt}\Big[- \frac{\partial \varepsilon^y}{\partial p_y}\Big|_{mod(182)} (x - \dot{y})^2 \Big] \tag{186}$$

10 Charges de Noether

10.1 Symétries dans le formalisme lagrangien

Rappelons que, dans le formalisme lagrangien, une symétrie correspond à un changement de variables $q^\alpha \to q'^\alpha$ qui laisse le lagrangien invariant à une dérivée totale par rapport au temps près :

$$L(q', \dot{q}', t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{dK}{dt} \tag{187}$$

la dérivée d'Euler-Lagrange étant covariante sous changement de variables, si $\frac{\delta L(q,\dot{q},t)}{\delta q^\alpha} \equiv 0$, alors $\frac{\delta L(q',\dot{q}',t)}{\delta q'^\alpha} \equiv 0$.

A une transformation de symétrie infinitésimale $q^\alpha \to q^\alpha + \delta q^\alpha(q, \dot{q}, t)$, on définit $\delta K(q, \dot{q}, t)$ la quantité telle que $\delta L = \frac{d\delta K}{dt}$ à laquelle correspond la charge de Noether, ou intégrale première du mouvement, voire constante du mouvement :

$$Q(q, \dot{q}, t) = \delta q^\alpha(q, \dot{q}, t) p_\alpha(q, \dot{q}, t) - \delta K(q, \dot{q}, t) \tag{188}$$

A une symétrie globale :

- sous translation des positions correspond la conservation du moment p_α (et q^α est une variable cyclique).
- sous translation dans le temps correspond la conservation de l'énergie de Noether (et le temps est une variable cyclique).
- sous rotation correspond la conservation du moments angulaire.

La suite de cette section consiste à déterminer les charges de Noether dans un système dont la description hamiltonienne présente des contraintes.

10.2 Charges et contraintes

Tout le long de cette sous-section, nous allons travailler avec les variables indépendantes $(q, p_a, \dot{q}^{\hat{m}}, t)$ et les quantités fonctions de ces variables seront surmontées d'un chapeau.

$$\widehat{p}_\alpha := \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}^\alpha}\Big|_{\dot{q}^{\hat{a}}=h^{\hat{a}}(q,p_a,\dot{q}^{\hat{m}},t)} \Rightarrow \widehat{p}_a = p_a \quad ; \quad \widehat{p}_m = f_m(q^\alpha, p_a, t) \tag{189}$$

$$\widehat{\delta q}^\alpha(q^\beta, p_a, \dot{q}^{\hat{m}}, t) := \delta q^\alpha(q^\nu, h^{\hat{a}}(q, p_a, \dot{q}^{\hat{m}}, t), \dot{q}^{\hat{m}}, t) \tag{190}$$

$$\widehat{\delta K}(q, p_a, \dot{q}^{\hat{m}}, t) := \delta K(q^\nu, h^{\hat{a}}(q, p_a, \dot{q}^{\hat{m}}, t), \dot{q}^{\hat{m}}, t) \tag{191}$$

Une relation utile dans l'espace des configurations est la suivante :

$$\delta\Big(\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}^\alpha}\Big) = \frac{\partial \delta K}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial \delta q^\beta}{\partial q^\alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta} + \frac{\partial \delta q^\beta}{\partial \dot{q}^\alpha}\Big[\frac{d}{dt}\big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta}\big) - \frac{\partial L}{\partial q^\beta}\Big] \tag{192}$$

Cette dernière permet de définir la variation du moment $\widehat{p}_\alpha$ et de passer de la première à la deuxième ligne dans le calcul ci-dessous ;

$$\widehat{\delta p}_\alpha(q, p_a, \dot{q}^{\hat{m}}, t) := \Big[\delta\Big(\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}^\alpha}\Big) + \frac{\partial \delta q^\beta}{\partial \dot{q}^\alpha}\frac{\delta L}{\delta q^\beta}\Big]\Big|_{\dot{q}^{\hat{a}}=h^{\hat{a}}(q,p_a,\dot{q}^{\hat{m}},t)} \tag{193}$$

$$= \Big[\frac{\partial \delta K}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial \delta q^\beta}{\partial q^\alpha}\frac{\partial L}{\dot{q}^\beta}\Big]\Big|_{\dot{q}^{\hat{a}}=h^{\hat{a}}(q,p_a,\dot{q}^{\hat{m}},t)} \tag{194}$$

Cette définition de la variation de $\widehat{p}_\alpha$ est judicieusement choisie du fait qu'elle n'est pas fonction des accélérations. La variation du "moment" $\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}^\alpha}\Big|_{\dot{q}^{\hat{a}}=h^{\hat{a}}}$ est décrite comme en (192) si ce n'est que le terme contenant des accélérations doit disparaître. c'est pourquoi on soustrait à $\delta\Big(\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}^\alpha}\Big)\Big|_{\dot{q}^{\hat{a}}=h^{\hat{a}}}$ le terme $\frac{\partial \delta q^\beta}{\partial \dot{q}^\alpha}\Big[\frac{d}{dt}\big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta}\big) - \frac{\partial L}{\partial q^\beta}\Big]\Big|_{\dot{q}^{\hat{a}}=h^{\hat{a}}}$.

La charge de Noether est, ici :

$$\widehat{Q}(q^\alpha, p_a, t) = \widehat{\delta q}^\alpha \widehat{p}_\alpha - \widehat{\delta K} \tag{195}$$

Cette quantité n'est effectivement pas fonction des $\dot{q}^{\hat{m}}$. Cela peut se montrer en utilisant l'égalité

$$\frac{\partial \delta K}{\partial \dot{q}^\alpha}\Big|_{\dot{q}^{\hat{a}}=h^{\hat{a}}} = \widehat{p}_\beta \frac{\partial \delta q^\beta}{\partial \dot{q}^\alpha}\Big|_{\dot{q}^{\hat{a}}=h^{\hat{a}}} \tag{196}$$

qui nous permet de dire que la dérivée partielle de $\widehat{Q}$ par rapport à $\dot{q}^{\hat{m}}$ est nulle.

On trouve également les égalités suivantes :

$$\frac{\partial \widehat{Q}}{\partial p_a} = \widehat{\delta q}^a + \widehat{\delta q}^m \frac{\partial f_m}{\partial p_a} \tag{197}$$

$$\frac{\partial \widehat{Q}}{\partial q^\alpha} = -\widehat{\delta p}_\alpha + \widehat{\delta q}^m \frac{\partial f_m}{\partial q^\alpha} \tag{198}$$

On remarque que la fonction f_m apparaît dans ces deux relations. Or, on voudrait que la charge de Noether puisse générer les transformations de symétrie $\widehat{\delta q}^a$ et $\widehat{\delta p}_\alpha$, et f_m ne s'annule pas sur la surface des contraintes. Pour pouvoir corriger le problème, on introduit *la charge de Noether totale* qui est fonction de $(p_\alpha, q^\beta, \dot{q}^m, t)$.

10.3 Charges de Noether totales

10.3.1 Avec des variables de moments, positions et vitesses

Les variables indépendantes sont désormais $(p_a, q^\beta, \dot{q}^m, t)$.Toute fonction qui sera dépendante de ces variables sera surmontée d'un tilde.

$$\dot{q}^\alpha = \tilde{v}^\alpha(q^\beta, p_a, \dot{q}^m, t) \tag{199}$$

$$\tilde{p}_\alpha := \frac{\partial L(q,\dot{q},t}{\partial \dot{q}^\alpha}\Big|_{\dot{q}^\alpha=\tilde{v}^\alpha(q^\beta,p_a,\dot{q}^m,t)} = \widehat{p}_\alpha \qquad \Rightarrow \tilde{p}_a = p_a \quad \tilde{p}_m = f_m(q, p_a, t) \tag{200}$$

$$\delta\tilde{K}(q^\beta, p_a, \dot{q}^m, t) := \delta K(q, \tilde{v}, t) = \widehat{\delta K}(q, p_a, \tilde{v}^{\hat{m}}, t) \tag{201}$$

$$\tilde{\delta q}^\alpha(q^\beta, p_a, \dot{q}^m, t) := \delta q^\alpha(q, \tilde{v}, t) = \widehat{\delta q}^\alpha(q, p_a, \tilde{v}^{\hat{m}}, t) \tag{202}$$

$$\tilde{\delta p}_\alpha(q^\beta, p_a, \dot{q}^m, t) := \widehat{\delta p}_\alpha(q, p_a, \tilde{v}^{\hat{m}}, t) \tag{203}$$

La charge de Noether totale est définie par :

$$\tilde{Q}_T(p, q, \dot{q}^m, t) = \tilde{\delta q}^\alpha p_\alpha - \delta\tilde{K}(q^\beta, p_a, \dot{q}^m, t) \tag{204}$$

$$= \widehat{Q}(q, p_a, t) + \delta q^n(q, p_a, \dot{q}^m, t)(p_n - f_n(q, p_a, t)) \tag{205}$$

Les moments p_m n'ont pas été substitués par les fonctions f_m car les $\tilde{\delta q}^\alpha$ sont multipliés par les moments p_α et non $\tilde{p}_\alpha$. L'apparition des f_m est dûe au fait que $\widehat{Q}$ est exprimé en fonction des variables (q, p_a, t).

Les dérivées partielles de $\tilde{Q}_T$ ont une expression intéressante :

$$\{\tilde{Q}_T, q^\alpha\} = -\tilde{\delta q}^\alpha - \{q^\alpha, \tilde{\delta q}^m\}(p_m - f_m(p_a, q, t)) \tag{206}$$

$$\{\tilde{Q}_T, p_\alpha\} = -\tilde{\delta p}_\alpha - \{p_\alpha, \tilde{\delta q}^m\}(p_m - f_m(p_a, q, t)) \tag{207}$$

Elles se simplifient sur la surface des contraintes primaires $\mathcal{V}$:

$$\{\tilde{Q}_T, q^\alpha\} = -\frac{\partial\tilde{Q}_T}{\partial p_\alpha} \approx -\tilde{\delta q}^\alpha \quad ; \quad \{\tilde{Q}_T, p_\alpha\} = \frac{\partial\tilde{Q}_T}{\partial q^\alpha} \approx -\tilde{\delta p}_\alpha \tag{208}$$

Ces relations (208) peuvent s'interpréter de la sorte : les charges de Noether totales génèrent les transformations de symétrie infinitésimales sur $\mathcal{V}$ et sur la surface du mouvement.

Nous allons montrer que la surface des contraintes primaires est préservée sous transformations de symétrie infinitésimales sur la surface du mouvement. Autrement dit, on va montrer que $\{\tilde{Q}_T, \phi_m(q, p_a, t)\} \equiv 0$ [2]. On a en effet que, en s'aidant de la relation (194) :

$$\{\tilde{Q}_T, \phi_m(q, p_a, t)\} \approx -\tilde{\delta p}_m + \frac{\partial f_m}{\partial q^\alpha}\tilde{\delta q}^\alpha + \frac{\partial f_m}{\partial p_a}\tilde{\delta p}_a \tag{209}$$

$$\approx -\Big[\delta\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m}\Big) + \frac{\partial \delta q^\beta}{\partial \dot{q}^m}\frac{\delta L}{\delta q^\beta}\Big] + \frac{\partial f_m}{\partial q^\alpha}\tilde{\delta q}^\alpha + \frac{\partial f_m}{\partial p_a}\Big[\delta\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\Big) + \frac{\partial \delta q^\beta}{\partial \dot{q}^a}\frac{\delta L}{\delta q^\beta}\Big] \tag{210}$$

Or nous avons l'égalité suivante :

$$\delta f_m(q, p_a, t) = \frac{\partial f_m}{\partial q^\alpha}\tilde{\delta q}^\alpha + \frac{\partial f_m}{\partial p_a}\delta\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\Big) \tag{211}$$

Et comme $\frac{\partial L(q,\dot{q},t}{\partial \dot{q}^m} = f_m(q, \dot{q}, t)$, on obtient finalement :

$$\{\tilde{Q}_T, \phi_m(q, p_a, t)\} \approx -\delta f_m + \delta f_m + \frac{\delta L}{\delta q^\beta}\Big(-\frac{\partial \delta q^\beta}{\partial \dot{q}^m} + \frac{\partial \delta q^\beta}{\partial \dot{q}^a}\frac{\partial f_m}{\partial p_a}\Big) \equiv 0 \tag{212}$$

2. La variation d'une fonction F sous transformation est, vu (208), $\frac{\partial F}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha + \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha \approx \{\tilde{Q}_T, F\}$

10.3.2 Dans l'espace des phases

Jusqu'ici, les charges de Noether ne sont pas pleinement définies dans l'espace des phases, ne sont pas pleinement exprimées avec les variables de positions et moments. Toutefois, on sait que l'on peut résoudre les contraintes et déterminer les $u^m(p,q,t)$, c'est-à-dire que les vitesses $\dot{q}^m$ sont complètement déterminées dans l'espace des phases avec, on le rappelle, des fonctions arbitraires $\lambda^i(t)$. En substituant les $\dot{q}^m$ par la solution $u^m(p,q,t)$ (76) dans les transformations infinitésimales (202)-(203), ces dernières deviennent des fonctions de (q,p).

$$\Delta q^\alpha(p,q,t) := \tilde{\delta q}^\alpha(q,p_a,\dot{q}^m(p,q,t),t) \tag{213}$$
$$\Delta p_\alpha(p,q,t) := \tilde{\delta p}_\alpha(q,p_a,\dot{q}^m(p,q,t),t) \tag{214}$$
$$Q_T(p,q,t) := \tilde{Q}_T(q,p_a,\dot{q}^m(p,q,t),t) = \Delta q^\alpha p_\alpha - \tilde{\delta K}(q,p_a,\dot{q}^m(p,q,t),t) \tag{215}$$

Les crochets de Q_T avec les variables de l'espace des phases sont :

$$\{Q_T,q^\alpha\} = -\Delta q^\alpha - \{q^\alpha,\Delta q^m\}(p_m - f_m(p_a,q,t)) \tag{216}$$
$$\{Q_T,p_\alpha\} = -\Delta p_\alpha - \{p_\alpha,\Delta q^m\}(p_m - f_m(p_a,q,t)) \tag{217}$$

L'hamiltonien totale étant $\mathcal{H}_T := \tilde{v}^\alpha p_\alpha - L(q,\tilde{v},t)$, on a, sur la surface des contraintes primaires $\mathcal{V}$:

$$\{Q_T,\mathcal{H}_T\} \approx \{Q_T,\tilde{v}^\alpha\}p_\alpha - \tilde{v}^\alpha\Delta p_\alpha + \Delta q^\alpha\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \{Q_T,\tilde{v}^\alpha\}\frac{\partial L}{\partial\tilde{v}^\alpha} \tag{218}$$

Toutefois, comme $p_\alpha - \frac{\partial L(q,\tilde{v},t)}{\partial\tilde{v^\alpha}}$ correspond à la somme sur a de $p_a - \frac{\partial L(q,\tilde{v},t)}{\partial\tilde{v^a}}$, quantité nulle, et à la somme sur m de $p_m - \frac{\partial L(q,\tilde{v},t)}{\partial\tilde{v^m}}$ qui s'annule sur la surface des contraintes, on obtient finalement :

$$\{Q_T,\mathcal{H}_T\} \approx -\tilde{v}^\alpha\Delta p_\alpha + \Delta q^\alpha\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \tag{219}$$
$$\approx -\tilde{v}^\alpha\Big(\frac{\partial\delta K(q,\tilde{v},t)}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial L(q,\tilde{v},t)}{\partial\tilde{v}^\beta}\frac{\partial\delta q^\beta(q,\tilde{v},t)}{\partial q^\alpha}\Big) + \Delta q^\alpha\frac{\partial L(q,\tilde{v},t)}{\partial q^\alpha} \tag{220}$$
$$\approx \frac{\partial\delta K}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial\tilde{v}^\alpha}\frac{\partial\delta q^\alpha}{\partial t} \tag{221}$$
$$\approx \frac{\partial\delta K}{\partial t} - \frac{\partial\delta q^\alpha}{\partial t}p_\alpha \tag{222}$$

Cette égalité faible montre alors que :

$$\{Q_T,\mathcal{H}_T\} + \frac{\partial Q_T}{\partial t} \approx 0 \tag{223}$$

Cela signifie que, en plus d'être nulle sur la surface du mouvement, la dérivée totale de la charge Q_T est également nulle sur la surface des contraintes. On peut ainsi dire que $\{Q_T,\mathcal{H}_T\} + \frac{\partial Q_T}{\partial t}$ est une combinaison linéaire des contraintes primaires. En d'autres termes, la charge de Noether totale génère une transformation qui préserve l'hamiltonien sur la surface des contraintes.

$$\Delta\mathcal{H}_T = \frac{\partial\mathcal{H}_T}{\partial q^\alpha}\Delta q^\alpha + \frac{\partial\mathcal{H}_T}{\partial p_\alpha}\Delta p_\alpha \tag{224}$$
$$\approx \frac{\partial\mathcal{H}_T}{\partial q^\alpha}\frac{\partial Q_T}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial\mathcal{H}_T}{\partial p_\alpha}\frac{\partial Q_T}{\partial q^\alpha} \tag{225}$$
$$\approx \{Q_T,\mathcal{H}_T\} \tag{226}$$
$$\approx -\frac{\partial Q_T}{\partial t} \tag{227}$$

Q_T préserve aussi les contraintes primaires sur la surface du mouvement. Utilisons le symbôle $\cong$ signifiant que l'égalité se fait sur la trajectoire naturelle tout en rappelant qu'elle s'effectue également modulo les conditions définissant la surface des contraintes primaires.

$$\{Q_T,\phi_m(q,p_a,t)\} \cong 0 \tag{228}$$

Etant donné que la dérivée totale par rapport au temps dans l'espace des phases correspond à "l'opérateur" $\{,\mathcal{H}_T\} + \frac{\partial}{\partial t}$ sur la surface du mouvement, l'évolution dans le temps de (228) est nulle sur la surface du mouvement :

$$\frac{d}{dt}\{Q_T, \phi_m(q,p_a,t)\} \equiv \{\{Q_T, \phi_m(q,p_a,t)\}, \mathcal{H}_T\} + \frac{\partial}{\partial t}\{Q_T, \phi_m(q,p_a,t)\} \cong 0 \tag{229}$$

Les contraintes secondaires peuvent apparaître dans cette relation. Ces dernières sont dévoilées lorsque l'on calcule $\{\phi_m, \mathcal{H}_T\} + \frac{\partial \phi_m}{\partial t}$, terme que l'on peut faire apparaître dans (229) en utilisant l'identité de Jacobi et la règle de Leibniz :

$$\{Q_T, \{\phi_m, \mathcal{H}_T\} + \frac{\partial \phi_m}{\partial t}\} = -\{\mathcal{H}_T, \{Q_T, \phi_m\}\} - \{\phi_m, \{Q_T, \mathcal{H}_T\}\} + \{Q_T, \partial_t \phi_m\} \tag{230}$$

$$= \{\{Q_T, \phi_m\}, \mathcal{H}_T\} + \partial_t\{Q_T, \phi_m\} + \{\phi_m, \{Q_T, \mathcal{H}_T\} + \partial_t Q_T\} \tag{231}$$

Donc, la relation (229) devient :

$$\frac{d}{dt}\{Q_T, \phi_m(q,p_a,t)\} \equiv \{Q_T, \{\phi_m, \mathcal{H}_T\} + \partial_t \phi_m\} - \{\phi_m, \{Q_T, \mathcal{H}_T\} + \partial_t Q_T\} \tag{232}$$

$$\frac{d}{dt}\{Q_T, \phi_m(q,p_a,t)\} \cong 0 \tag{233}$$

Dès lors, si $\{Q_T, \mathcal{H}_T\} + \partial_t Q_T$ est une contrainte de première classe, alors on conclut que, non seulement les contraintes primaires sont conservées "on-shell", mais également les contraintes secondaires le sont. Dans ce cas, il est immédiat, via (232), que Q_T est de première classe "on-shell".

11 Symétries dans un système à hamiltonien total

Jusqu'ici, les équations/relations dérivées, notamment les propriétés des charges de Noether, tirent leur origine d'une symétrie dans un système lagrangien. On souhaiterait alors discuter de symétrie obtenue directement dans un système hamiltonien, ce sans se référer à un système lagrangien. Dans cette section, on va introduire les variables x^M ($1 \leq M \leq 2N$) pour désigner les positions et moments ; $x^\alpha = q^\alpha$ et $x^{\alpha+N} = p_\alpha$. Définissons la matrice $J^{MN} = \{x^M, x^N\}$:

$$(J)^{MN} \begin{pmatrix} 0 & \delta^\alpha{}_\beta \\ -\delta_\alpha{}^\beta & 0 \end{pmatrix} \tag{234}$$

qui permet d'écrire de façon compacte $\{F, G\} = \partial_M F J^{MN} \partial_N G$ et donc en particulier $\{x^M, F\} = J^{MN}\partial_N F$.

11.1 Définition de symétrie dans l'espace des phases

Une symétrie dans un système hamiltonien total est définie comme étant une transformation dans l'espace des phases :

- qui ne dépend que des variables de l'espace des phases (et pas des dérivées de ces variables) ;

$$x^M \longrightarrow x'^M(x,t) \tag{235}$$

- qui préserve la forme symplectique, c'est-à-dire $J^{MN} = \{x'^M(x,t), x'^N(x,t)\}$.
- qui préserve les solutions physiques du mouvement ainsi que les contraintes. Autrement dit, soit un hamiltonien total $\mathcal{H}_T(x,t;\lambda,w)$ comme en (83), si $x(t)$ est solution de l'équation

$$\dot{x}^M = J^{MN}\partial_N \mathcal{H}_T(x,t;\lambda,w) \tag{236}$$

  alors $x'^M(x,t)$ doit être solution de l'équation

$$\dot{x'}^M = \partial_N x'^M \dot{x}^N + \partial_t x'^M = J^{MN}\partial'_N \mathcal{H}_T(x',t;\lambda',w') \tag{237}$$

  pour le même hamiltonien à un changement des paramètres $\lambda^i(t)$ et $w^{hh'}(t)$ près.
  Ensuite, si la symétrie préserve les contraintes sur $\mathcal{S}$ et sur la surface du mouvement, alors :

$$\phi_h(x',t) \cong c_h^g(x,t)\phi_g(x,t) \tag{238}$$

Si la transformation est infinitésimale, ($x' = \epsilon\delta x + x$), cette dernière devant obéir à la condition de préservation de la forme symplectique, on a que :

$$J^{-1}_{ML}\partial_N(\delta x^L) = J^{-1}_{NL}\partial_M(\delta x^L) \tag{239}$$

Ce qui signifie que la 1-forme $\delta x_M = J^{-1}_{ML}\partial_N(\delta x^L)$ est fermée et donc exacte sous les hypothèses du Lemme de Poincaré. En effet on trouve bien que $d(\delta x_M) = J^{-1}_{ML}\partial_N(\delta x^L)dx^M \wedge dx^N = \Omega$ et, par (239), les indices de sommation dans les composantes de la 2-forme permuttent, $J^{-1}_{ML}\partial_N(\delta x^L)dx^M \wedge dx^N = J^{-1}_{NL}\partial_M(\delta x^L)dx^M \wedge dx^N = -\Omega$, ce qui implique que $\Omega = 0$ et donc la 1-forme est bien fermée.

Dès lors, par le lemme de Poincarré, il existe une fonction génératrice $\mathcal{Q}_H(x)$ de l'espace des phases telle que :

$$\delta x^M = \partial^M \mathcal{Q}_H(x) = \{x^M, \mathcal{Q}_H(x)\} \tag{240}$$

Toute transformation de la sorte (où δx^M correspond au "gradient" d'une fonction) laisse la forme symplectique invariante.

11.2 Transformation canonique dans l'espace des phases

Une transformation de symétrie se réfère à un hamiltonien total donné. Dans le cas de "transformations canoniques", cet hamiltonien n'est pas spécifié. On définit une transformation canonique $x \longrightarrow x'(x,t)$ comme étant une transformation de coordonnées dans l'espace des phases telle que pour tout hamiltonien total $\mathcal{H}_T(x,t)$, il doit exister un autre hamiltonien total $\mathcal{H}'_T(x',t)$ vérifiant :

$$\dot{x}'^M = \dot{x}^N\partial_N x'^M + \partial_t x' M = j^{MN}\partial'_N \mathcal{H}'_T(x',t) \tag{241}$$

Cette condition est équivalente à

$$J^{NK}\partial_K\mathcal{H}_T(x,t)\partial_N\mathcal{H}_T(x,t) + \partial_t x'^M = j^{MN}\partial'_N\mathcal{H}'_T(x',t) \tag{242}$$

$$\{x'^M, x'^N\}\partial'_N\mathcal{H}_T(x,t) + \partial_t x'^M = J^{MN}\partial_N\mathcal{H}'_T(x',t) \tag{243}$$

Pour un hamiltonien total arbitraire et en notant $x'_M = J^{-1}_{MN}x'^N$ la condition d'intégrabilité mène à :

$$\partial'_M\{x'_N, x'^K\}\partial'_K\mathcal{H}_T + \{x'_N, x'^K\}\partial'_K\partial'_M\mathcal{H}_T + \partial'_M x^K\partial_K\partial_t x'_N \tag{244}$$

$$= \partial'_N\{x'_M, x'^K\}\partial'_K\mathcal{H}_T + \{x'_M, x'^K\}\partial'_K\partial'_N\mathcal{H}_T + \partial'_N x^K\partial_K\partial_t x'_M \tag{245}$$

Puisque cela doit être vérifié pour des hamiltonien $\mathcal{H}_T(x,t)$ arbitraires, on déduit trois relations indépendantes :

$$\partial'_M\{x'_N, x'^K\}\partial'_K\mathcal{H}_T = \partial'_N\{x'_M, x'^K\}\partial'_K\mathcal{H}_T \tag{246}$$

$$\{x'_N, x'^K\}\partial'_K\partial'_M\mathcal{H}_T = \{x'_M, x'^K\}\partial'_K\partial'_N\mathcal{H}_T \tag{247}$$

$$\partial'_M x^K\partial_K\partial_t x'_N = \partial'_N x^K\partial_K\partial_t x'_M \tag{248}$$

Des choix différents d'hamiltonien nous permettent d'aboutir à certaines conclusions.

Imaginons le choix $\mathcal{H}_T = x'^P x'^Q$. la relation (247) nous indique que $\{x'_N, x'^K\}$ est proportionnel à δ^K_N et donc que

$$\{x'^M, x'^N\} = f(x,t)J^{MN} \tag{249}$$

Le choix $\mathcal{H}_T = x'^P$, nous mène à dire, via (246), que $f(x,t)$ est indépendant de x :

$$\partial_M f(x,t) = 0 \tag{250}$$

La dernière relation (248) nous dit, elle, qu'il existe une fonction $\varpi(x',t)$ satisfaisant $\partial_t x'_M = \partial'_M\varpi(x',t)$. Avec cela, on trouve alors que $f(x,t)$ est indépendante du temps. Finalement, cette fonction n'est autre qu'une constante. En d'autres termes, les transformations canoniques laissent la forme symplectique invariante à une constante près. En "normalisant", il est aisé de rendre la forme symplectique invariante. Dès lors, les transformations canoniques conservent $\{x'^M, x'^N\} = J^{MN}$.

11.3 Critères pour être générateurs de symétrie

Nous allons regarder les propriétés de la fonction génératrice de symétrie $\mathcal{Q}_H$ de (240). Cette dernière doit respecter les conditions imposées par la définition de transformation de symétrie.

Regardons une transformation infinitésimale qui transforme l'hamiltonien total de la sorte :

$$\mathcal{H}_T \longrightarrow \mathcal{H}_T + \frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial x^M}\delta x^M + \frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial \lambda^i}\delta\lambda^i + \frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial w^{hh'}}\delta w^{hh'} \tag{251}$$

Le calcul de $\{\delta x^M, \mathcal{H}_T\} + \partial_t(\delta x^M)$ donne, quelque soit l'hamiltonien :

$$\{\delta x^M, \mathcal{H}_T\} + \partial_t(\delta x^M) = \delta x^L \partial_L\{x^M, \mathcal{H}_T\} + \{x^M, \gamma_i^{(1)}\delta\lambda^i + \frac{1}{2}\phi_h\phi_{h'}\delta w^{hh'}\} \tag{252}$$

Où les indices h et h' parcourent toutes les contraintes. Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles dont les inconnues sont les $\delta x^M(x,t)$. La solution générale de cette équation peut donner l'ensemble des symétries d'un système hamiltonien donné.

En outre :

$$\delta x^M \partial_M \phi_h = \{x^M, \mathcal{Q}_H\}\partial_M\phi_h = \{\mathcal{Q}_H, \phi_h\} \cong 0 \tag{253}$$

Et donc $\mathcal{Q}_H$ est de première classe sur la surface du mouvement.
On réécrit l'équation (252) sous la forme :

$$\{\{x^M, \mathcal{Q}_H\}, \mathcal{H}_T\} = -\{\mathcal{Q}_H, \{x^M, \mathcal{H}_T\}\} + \{x^M, \gamma_i^{(1)}\delta\lambda^i + \frac{1}{2}\phi_h\phi_{h'}\delta w^{hh'} - \partial_t\mathcal{Q}_H\} \tag{254}$$

En appliquant l'identité de Jacobi, on trouve alors :

$$\{x^M, \{\mathcal{Q}_H, \mathcal{H}_T\} + \partial_t\mathcal{Q}_H - \gamma_i^{(1)}\delta\lambda^i - \frac{1}{2}\phi_h\phi_{h'}\delta w^{hh'}\} = 0 \quad \forall x^M \tag{255}$$

Cela implique que l'élément de droite dans le crochet est égale à une fonction arbitraire du temps.

$$\{\mathcal{Q}_H, \mathcal{H}_T\} + \partial_t\mathcal{Q}_H - \gamma_i^{(1)}\delta\lambda^i - \frac{1}{2}\phi_h\phi_{h'}\delta w^{hh'} = f(t) \tag{256}$$

En redéfinissant le générateur $\mathcal{Q}_H \longrightarrow \mathcal{Q}_H + \int_{t_0}^t dt' f(t')$, redéfinition permise car elle n'apporte pas de modification à la transformation de symétrie $\delta x^M = \{x^M, \mathcal{Q}_H\}$, on peut se débarrasser de cette fonction arbitraire.

On conclut alors que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une quantité de première classe "on-shell" $\mathcal{Q}_H(q,p,t)$ soit un générateur de symétrie d'un certain hamiltonien total $\mathcal{H}_T(p,q,t;\lambda,w)$ est :

$$\{\mathcal{Q}_H, \mathcal{H}_T\} + \partial_t\mathcal{Q}_H = \gamma_i^{(1)}\delta\lambda^i + \frac{1}{2}\phi_h\phi_{h'}\delta w^{hh'} \tag{257}$$

11.3.1 Charges de Noether et constantes comme générateurs

La condition nécessaire et suffisante dérivée ci-dessus dictant le caractère ou non de symétrie d'une quantité $\mathcal{Q}_H$ permet de confirmer que, en particulier, les charges de Noether Q dans un système sans contraintes sont des générateurs de symétrie globale. En effet, dans ce cas, il n'y a pas de symétrie de jauge, ce qui implique $\delta\lambda^i = 0 = \delta w^{hh'}$, et Q étant une intégrale première du mouvement, on a immédiatement $\{Q, \mathcal{H}\} + \partial_t Q = 0$. De façon générale, toute quantité qui est de première classe et qui est conservée sur la surface du mouvement est un générateur de symétrie. En effet, affirmer qu'une quantité est constante sur les équations du mouvements revient à dire que le crochet de cette quantité avec l'hamiltonien additionné de sa dérivée partielle par rapport au temps est égale (et pas égale modulo le mouvement) à zéro.

Les charges totales de Noether, elles, sont des générateurs de symétrie dans un système à contraintes à la condition que $\{Q_T, \mathcal{H}_T\} + \partial_t Q$ est une contrainte de première classe.

11.3.2 Dans le cas statique

Dans le cas où hamiltoniens de première classe et contraintes ne dépendent pas explicitement du temps (l'hamiltonien total reste dépendant du temps car les fonctions de jauge sont des fonctions du temps), l'hamiltonien total est lui-même un générateur de symétrie étant donné que

$$\frac{d\mathcal{H}_T}{dt} \equiv 0 \Rightarrow \{\mathcal{H}_T, \mathcal{H}_T\} + \frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial t} = 0 \tag{258}$$

Si, en plus, il n'y a aucune contrainte secondaire de première classe dans le système, autrement dit si toutes les contraintes de premières classe sont des combinaisons linéaires des contraintes primaires de première classe, alors $\mathcal{Q}_H = \varepsilon^i(t)\gamma_i^{(1)}$ est générateur de symétrie de jauge :

$$\{\mathcal{Q}_H, \mathcal{H}_T\} + \partial_t \mathcal{Q}_H = \gamma_j^{(1)} T_i^j \varepsilon^i(t) + \dot{\varepsilon}^i(t)\gamma_i^{(1)} \tag{259}$$

Autrement, $\varepsilon^i(t)\gamma_p^{(1)}$ est aussi générateur de symétrie de jauge si le crochet de $\gamma_i^{(1)}$ avec l'hamiltonien est quadratique en les contraintes ϕ_h :

$$\{\mathcal{Q}_H, \mathcal{H}_T\} + \partial_t \mathcal{Q}_H = \frac{1}{2}\phi_h \phi_{h'} T_i^{hh'} \varepsilon^i(t) + \dot{\varepsilon}^i(t)\gamma_i^{(1)} \tag{260}$$

Plus généralement, $\varepsilon^i(t)\gamma_i^{(1)}$ est générateur de symétrie si le crochet de ces contraintes primaires de première classe avec $\mathcal{H}_T$ est la somme d'un terme linéaire en les contraintes primaires de première classe et d'un terme quadratique en les contraintes primaires et/ou secondaires $\phi_h \phi_{h'}$.

11.3.3 Exemple

Soit le lagrangien $L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}e^y \dot{x}^2$. La contrainte primaire est $\phi_1 = p_y$, elle est de première classe. Les équations du mouvement indiquent que $x(t) = x_0$, et donc p_x n'est pas générateur de symétrie de jauge.

L'hamiltonien canonique de ce système est $\mathcal{H}_c = \frac{1}{2}e^{-y}p_x^2$ et le total est $\mathcal{H}_T = \frac{1}{2}e^{-y}(p_x)^2 + p_y \lambda(t)$. Grâce à l'hamiltonien, on trouve la seconde et dernière contrainte : il s'agit de $\phi_2 = p_x$ qui est de première classe. On fait ainsi face à un contre-exemple de la conjecture de Dirac car on a une contrainte de première classe p_x qui ne génère pas de symétrie de jauge.

On a toutefois que :

$$\{p_y, \mathcal{H}_T\} = \frac{1}{2}e^{-y}(p_x)^2 \tag{261}$$

$\{p_y, \mathcal{H}_T\}$ correspond bien à une forme quadratique en les contraintes de première classe. Donc $\mathcal{Q}_H = \varepsilon(t)p_y$ est génératrice de transformation de symétrie mais cette quantité ne génère qu'une translation arbitraire de la variable de jauge pure y :$\{y, \mathcal{Q}_H\} = \varepsilon$.

On peut aussi reprendre l'hamiltonien (113). Remarquons qu'il n'existe pas de lagrangien qui permette de fournir cet hamiltonien.

L'hamiltonien lui-même est générateur de symétrie puisque $\partial_t \mathcal{H}_T = 0$. Des transformations de symétrie (globale) sont $\delta x^M = \{x^M, \mathcal{H}_T\}$. Cela témoigne de la conservation de l'énergie ; dans un système lagrangien, la symétrie serait une symétrie sous translation dans le temps. Les contraintes primaires de première classe sont $\gamma_1 = \pi_\lambda$ et $\gamma_2 = \pi_\mu$. Un générateur de symétrie de jauge est alors $G = \varepsilon^1 \pi_\lambda + \varepsilon^2 \pi_\mu$; il génère des transformations de jauge simples :

$$\delta\lambda = \{\lambda, G\} = \varepsilon^1 \quad ; \quad \{\mu, G\} = \varepsilon^2 \tag{262}$$

Les autres transformations sont nulles.

La contrainte secondaire de première classe $\gamma_3 = \pi_\nu$ ne génère pas de symétrie de jauge car $\delta\mathcal{H} = \{\pi_\nu, \mathcal{H}\} = 0$. Laissant l'hamiltonien invariant, cette contrainte est en fait génératrice d'une symétrie globale. Une autre façon de comprendre la chose est de se dire que $\{\pi_\nu, \mathcal{H}\} = 0$ implique que $\delta\lambda^i = \delta w^{hh'} = 0$, ce qui traduit le fait que le système ne subit pas de transformation de jauge et que donc la symétrie ne peut être que globale (en d'autres termes, on a une constante de Noether, quantité qui, on le sait, génère des symétries globales).

11.3.4 Dans un système hamiltonien étendu

Dans le formalisme de l'hamiltonien étendu, toutes les contraintes de première classe correspondent à une symétrie de jauge si le système est statique ;

$$\mathcal{Q}_E = \gamma_I \varepsilon^I(t) \tag{263}$$

est un générateur de symétrie de jauge (ou symétrie locale). Ces générateurs ne sont autres que des combinaisons linéaires des contraintes, ils sont donc faiblement nuls. On note que les générateurs de symétrie globale ne s'annule pas sur la surface des contraintes. On comprend alors que seules les symétries globales définissent des charges conservées non-triviales.

11.3.5 En électromagnétisme

Une combinaison linéaire $\mathcal{Q}_H = \gamma_a^{(1)}\varepsilon^a(t) + \gamma_s^{(2)}\varepsilon^s(t)$ des contraintes primaires et secondaires de première classe $\gamma_a^{(1)}$ et $\gamma_s^{(2)}$ est génératrice d'une symétrie de jauge si les fonctions locales $\varepsilon^a(t)$ et $\varepsilon^s(t)$ satisfont

$$\frac{d\varepsilon^s(t)}{dt} + \mathcal{T}_r^s\varepsilon^r(t) + \mathcal{T}_a^s\varepsilon^a(t) = 0 \tag{264}$$

En effet, les contraintes de première classe sont telles que, comme la dérivée totale par rapport au temps d'une contrainte de première classe reste de première classe dans le cas statique :

$$\{\gamma_a^{(1)}, \mathcal{H}_T\} = \gamma_b^{(1)}\mathcal{T}_a^b + \gamma_s^{(2)}\mathcal{T}_a^s \tag{265}$$

$$\{\gamma_s^{(2)}, \mathcal{H}_T\} = \gamma_r^{(2)}\mathcal{T}_s^r + \gamma_a^{(1)}\mathcal{T}_s^a \tag{266}$$

Ce qui implique :

$$\{\mathcal{Q}_H, \mathcal{H}_T\} + \partial_t\mathcal{Q}_H = \gamma_a^{(1)}\dot{\varepsilon^a} + \gamma_s^{(2)}\dot{\varepsilon^s} + \{\gamma_a^{(1)}, \mathcal{H}_T\}\varepsilon^a + \{\gamma_s^{(2)}, \mathcal{H}_T\}\varepsilon^s \tag{267}$$

$$= \gamma_b^{(1)}(\varepsilon^a\mathcal{T}_a^b + \varepsilon^s\mathcal{T}_s^b + \dot{\varepsilon^b}) \tag{268}$$

$$+ \gamma_s^{(2)}(\varepsilon^a\mathcal{T}_a^s + \varepsilon^r\mathcal{T}_r^s + \dot{\varepsilon^s}) \tag{269}$$

On voit bien que (264) doit être satisfait pour que $\mathcal{Q}_H$ soit bien générateur de symétrie de jauge. Nous pouvons noter que si on trouve que $\frac{d\varepsilon^s}{dt} = 0$, alors les ε^s sont des constantes et les contraintes secondaires de première classe génèrent des symétries qui sont globales.

Un exemple qui illustre cela est celui de l'électromagnétisme. Déterminons avant tout l'hamiltonien à partir du lagrangien de Maxwell. Nous savons que la densité lagrangienne et le lagrangien sont :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad ; \quad L = \int d^3x^i\mathcal{L} \tag{270}$$

Où $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Notons que ce lagrangien reste inchangé ($\delta\mathcal{L} = 0$) sous les transformations $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\Psi(x)$ et/ou $A_0 \to A_0 + \Upsilon(x)$. En développant $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ et en prenant la métrique de Minkowski conventionnelle $(-,+,+,+)$, on a que :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_i A_j F_{ij} - \partial_0 A_i\partial_i A_0 + \frac{1}{2}\sum_i\left((\partial_i A_0)^2 + (\partial_0 A_i)^2\right) \tag{271}$$

Les moments sont calculés à partir de la densité lagrangienne :

$$\Pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_0))} = 0 \quad \Longrightarrow \text{contrainte primaire} \quad \Rightarrow A_0 = \mathcal{F}(x^\mu) \tag{272}$$

$$\Pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_i))} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = F_{0i} \tag{273}$$

$$\Rightarrow \partial_0 A_i = \Pi^i + \partial_i A_0 \tag{274}$$

La densité hamiltonienne canonique peut maintenant être calculée.

$$\mathfrak{H}_c = \Pi^i \partial_0 A_i - \mathcal{L} \tag{275}$$

$$= \frac{1}{2}\Pi^i\Pi^i + \Pi^i\partial_i A_0 + \frac{1}{2}\partial^i A^j F_{ij} \tag{276}$$

Avec $\partial^i A^j F_{ij} = \frac{1}{2} F_{ij} F_{ij}$. L'hamiltonien canonique qui en découle est, en prenant $\Pi^i \partial_i A_0 = \partial_i(A_0 \Pi^i) - A_0 \partial_i \Pi^i$:

$$\mathcal{H}_c = \int d^3x^i \mathfrak{H}_c = \int d^3x^i \big[\frac{1}{2}\Pi^i\Pi^i - A_0\partial_i\Pi^i + \frac{1}{4}F_{ij}F_{ij}\big] \ + \text{termes aux bords} \tag{277}$$

Et l'hamiltonien total est, quant à lui :

$$\mathfrak{H}_T = \frac{1}{2}\Pi^i\Pi^i - A_0\partial_i\Pi^i + \frac{1}{4}F_{ij}F_{ij} + \lambda(x) \tag{278}$$

$$\mathcal{H}_T = \int d^3x^i \big[\frac{1}{2}\Pi^i\Pi^i - A_0\partial_i\Pi^i + \frac{1}{4}F_{ij}F_{ij} + \lambda(x)\big] \tag{279}$$

La contrainte primaire est $\phi^{(1)} = \Pi^0$, elle permet de déterminer une contrainte secondaire : $\{\Pi^0(x), \mathcal{H}_T(y)\} = \frac{\partial \mathfrak{H}_T}{\partial A_0} = \partial_i \Pi^i = \phi^{(2)}$ [3]. Ces deux contraintes sont de première classe. Le générateur de symétrie de jauge est une combinaison linéaire des contraintes primaires et secondaires de première classe :

$$\mathcal{Q}_H = \int d^3x^i [\varepsilon^{(1)}(x)\partial_i\Pi^i + \varepsilon(x)\Pi^0] = \int d^3x^i [\varepsilon(x)\partial_i\Pi^i - \partial_0\varepsilon(x)\Pi^0] \tag{280}$$

Cette dernière égalité est une conséquence du fait que la relation (264) doit être satisfaite. Les crochets des contraintes avec la densité hamiltonienne nous indiquent que seul $\mathcal{T}_a^s$ est non nul et vaut 1. Il en découle que $\partial_0 \varepsilon(x) + 1\epsilon^{(1)}(x) = 0$ et donc $\epsilon^{(1)} = -\partial_0 \varepsilon$.

Il est maintenant possible de déterminer la symétrie générée par $\mathcal{Q}_H$; il suffit de calculer $\delta A^\mu = \{A^\mu(x), \mathcal{Q}_H(y)\}$:

$$\delta A^0 = \frac{\partial}{\partial \Pi^0(x)} \int d^3y^i \delta^3(x-y)[\varepsilon(y)\partial_i\Pi^i - \partial_0\varepsilon(y)\Pi^0] = \frac{\partial}{\partial \Pi^0(x)}(-\partial_0\varepsilon(x)\Pi^0(x)) \tag{281}$$

$$= -\partial_0 \varepsilon(x) \tag{282}$$

$$\delta A^i = \frac{\partial}{\partial \Pi^i(x)} \int d^3y^i \delta^3(x-y)[\varepsilon(y)\partial_i\Pi^i - \partial_0\varepsilon(y)\Pi^0] \tag{283}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \Pi^i(x)} \big[\varepsilon \Pi^i\big]^{bords} - \frac{\partial}{\partial \Pi^i(x)} \int d^3y^i \delta^3(x-y)\varepsilon(y)\partial_i\Pi^i \tag{284}$$

$$= -\partial_i \varepsilon(x) \tag{285}$$

En bilan, nous retrouvons, rassurés, la transformation de symétrie bien connue

$$\delta A^\mu = \partial_\mu\big(-\varepsilon(x)\big) \tag{286}$$

3. Note ; on aurait $\{\Pi^0(x), \mathcal{H}_T(y)\} = -\frac{\partial \Pi^0(x)}{\partial \Pi^0(z)} \frac{\partial \mathcal{H}_T(y)}{\partial A_0(z)} = -\delta^3(x-z) \int d^3y^i \delta^3(z-y) \frac{\partial \mathfrak{H}_T}{\partial y^i} = \sum_i \frac{\partial \Pi^i}{\partial z^i} \delta^3(x^i - z^i) = \partial_i \Pi^i$

Références

[1] Spindel P., *"Mécanique ; Volume 2, Mécanique analytique"*, Paris, Editions scientifiques GB, 2002, 132p.

[2] Henneaux M., Teitelboim C., *"Quantization of gauge systems"*, Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1992, 520p.

[3] Bekaert, X., Park, J.-H., *"Symmetries and dynamics in constrained systems"*, Seoul, Eur. Phys. J. C 61, 141., 2018, https ://doi.org/10.1140/epjc/s10052-009-0973-7