Conformal Field Theory and Second Order Phase Transition

Adrien Scalea

University of Mons
Physics department

June 2021

UMONS Université de Mons

Faculté des Sciences

Fonction de partition

Fonction de partition canonique :

$$Z = \sum_i \exp\left(-\beta \mathcal{H}_i\right)$$

-> elle permet de calculer toutes les observables. Énergie libre :

$$F = -kT \, \ln Z$$

Phase transitions

Transition de phase = marquée par la présence d'une discontinuité dans au moins une des dérivées de la fonction thermodynamique (E, G, F,...) qui décrit le système sous un changement des variables extérieures T, P, B,...

Phase transitions

Transition de phase = marquée par la présence d'une discontinuité dans au moins une des dérivées de la fonction thermodynamique (E, G, F,$\dots$) qui décrit le système sous un changement des variables extérieures T, P, B,...

Fonction de partition = somme de fonctions continues, pourtant on a des discontinuités.

Phase transitions

Transitions du 1er ordre

- Dérivée 1ère
- Chaleur latente
- Longueur de corrélation finie
- 2 phases ou +

Transitions du 2nd ordre ou **continues**

Phase transitions

Transitions du 1er ordre

- Dérivée 1ère
- Chaleur latente
- Longueur de corrélation finie
- 2 phases ou +

Transitions du 2nd ordre ou **continues**

- Dérivée 2nde ou +
- Brisure spontanée de symétrie
- Longueur de corrélation infinie
  $\longrightarrow$ invariance d'échelle
- 1 phase

Modèle d'Ising

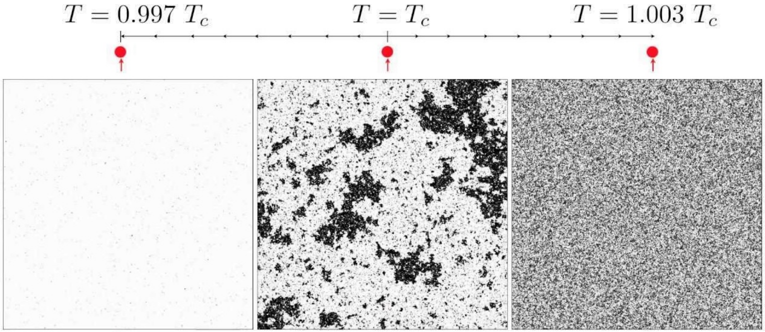
$$\mathcal{H} = -B\sum_i s_i - J\sum_{\langle ij\rangle} s_i s_j - K\sum_{\langle\langle ij\rangle\rangle} s_i s_j$$

–> symétrie sous $s_i \longrightarrow -s_i$ $(\mathbb{Z}_2)$ quand $B = 0$.

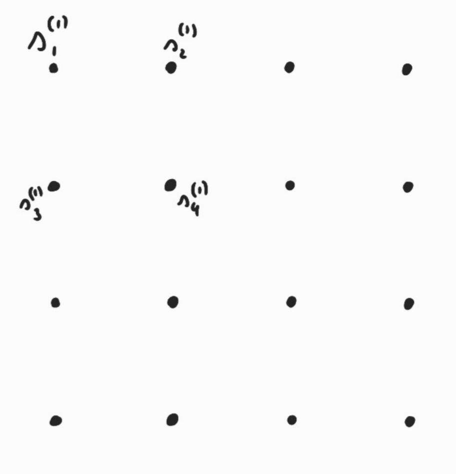
Modèle d'Ising

$$H = -B\sum_i s_i - J\sum_{\langle ij\rangle} s_i s_j - K\sum_{\langle\langle ij\rangle\rangle} s_i s_j$$

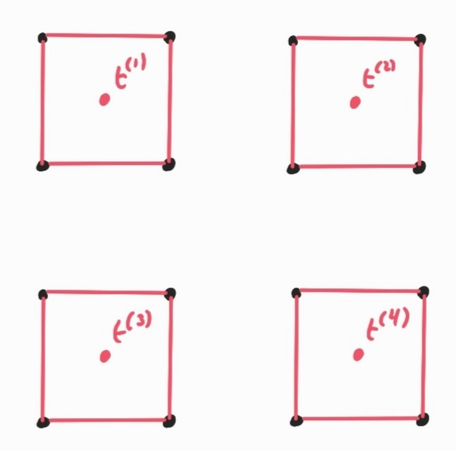
-> symétrie sous $s_i \longrightarrow -s_i$ ($\mathbb{Z}_2$) quand $B = 0$.



Block spin transformation



Block spin transformation

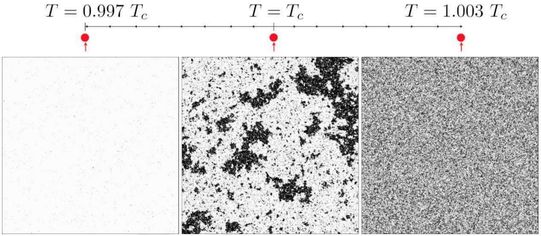


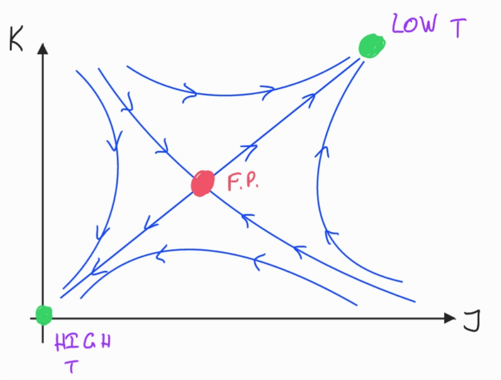
Groupe de renormalisation

= Formalisme permettant de calculer les *exposants critiques*...

On considère $H := \beta\mathcal{H} = \dfrac{\mathcal{H}}{kT}$ et $\vec{K} = (J,\, K, \ldots)$ vecteur des paramètres.

Groupe de renormalisation





Groupe de renormalisation

Une transformation du GR :

$$\vec{K}' = \mathcal{R}\vec{K}.$$

Le point fixe est tq

$$\mathcal{R}\vec{K}^* = \vec{K}^*.$$

Groupe de renormalisation

Une transformation du GR :

$$\vec{K}' = \mathcal{R}\vec{K}.$$

Le point fixe est tq

$$\mathcal{R}\vec{K}^* = \vec{K}^*.$$

On peut linéariser autour de $\vec{K}^*$

$$K'_a \approx K^*_a + \sum_b T_{ab}\,(K_b - K^*_b).$$

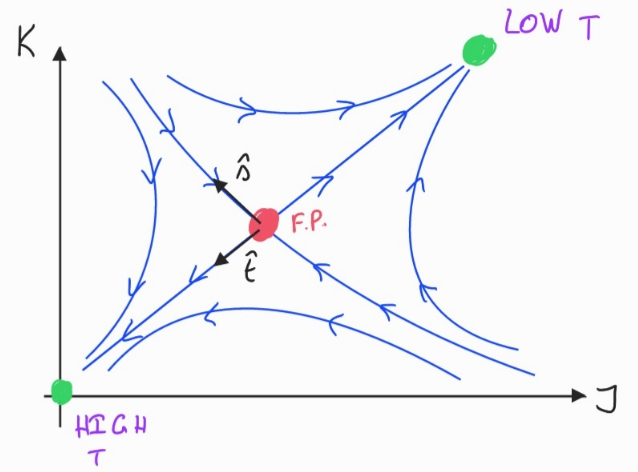
T a ici 2 valeurs propres λ et μ que l'on peut écrire

$$\lambda(b) = b^y$$
$$\mu(b) = b^z$$

pcq $\lambda(b_1)\lambda(b_2) = \lambda(b_1\, b_2)$.

Groupe de renormalisation

En fait, $\lambda < 1$ et $\mu > 1$, i.e. $y < 0$ (*irrelevant*) et $z > 0$ (*relevant*).
$\lambda \mapsto \hat{s}$ et $\mu \mapsto \hat{t}$.



Groupe de renormalisation

On peut utiliser $(t,\, s)$ plutôt que $(J,\, K)$ et écrire

$$\vec{K} = t\,\hat{t} + s\,\hat{s}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} T\,\vec{K} &= t\;T\;\hat{t} + s\;T\;\hat{s} \\ &= t\;b^{y}\;\hat{t} + s\;b^{z}\;\hat{s} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{cases} s^{(n)} = s\;b^{y\;n} \\ t^{(n)} = t\;b^{z\;n} \end{cases}}$$

Exposants critiques

La longueur de corrélation va se transformer comme

$$\xi(s\, b^{ny}, t\, b^{nz}) = \xi(s, t)/b^n.$$

Si on choisit $b^{nz}\, t = 1$, on trouve

$$\xi(s, t) = \frac{1}{t^{1/z}}\, \xi(0, 1) \propto \frac{1}{t^{1/z}}.$$

Les observables qui divergent $\sim$ loi en puissance avec un certain *exposant critique*.

Exposants critiques

La longueur de corrélation va se transformer comme

$$\xi(s\,b^{ny}, t\,b^{nz}) = \xi(s,t)/b^n.$$

Si on choisit $b^{nz}\,t = 1$, on trouve

$$\xi(s,t) = \frac{1}{t^{1/z}}\,\xi(0,1) \propto \frac{1}{t^{1/z}}.$$

Les observables qui divergent $\sim$ loi en puissance avec un certain *exposant critique*.

$$\xi \propto |t|^{-\nu}$$

Exposants critiques

La longueur de corrélation va se transformer comme

$$\xi(s\, b^{ny}, t\, b^{nz}) = \xi(s,t)/b^n.$$

Si on choisit $b^{nz}\, t = 1$, on trouve

$$\xi(s,t) = \frac{1}{t^{1/z}}\, \xi(0,1) \propto \frac{1}{t^{1/z}}.$$

Les observables qui divergent $\sim$ loi en puissance avec un certain *exposant critique*.

$$\xi \propto |t|^{-\nu} \qquad \longrightarrow \boxed{\nu = \frac{1}{z}}$$

Exposants critiques

On montre que $t \propto |T - T_c|$ et on pose $h = \beta B$.

$C \propto \lvert t\rvert^{-\alpha}$	chaleur spécifique
$M \propto (-t)^{\beta}$	magnétisation
$\chi \propto \lvert t\rvert^{-\gamma}$	susceptibilité
$M\rvert_{t=0} = \lvert h\rvert^{1/\delta}$	magnétisation au point critique
$\xi \propto \lvert t\rvert^{-\nu}$	longueur de corrélation
$\langle s(r)s(0)\rangle \propto r^{-(d-2+\eta)}$	fonction de corrélation

Exposants critiques

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 - \nu\, d \\ \gamma + 2\beta &= \nu\, d \\ \beta(\delta - 1) &= \gamma \\ \gamma &= \nu(2 - \eta) \end{aligned}$$

–> 4 équations pour 6 inconnues.

Phénomène d'universalité.

Invariance d'échelle et groupe conforme

$$\left.\begin{array}{l}\text{Invariance d'échelle}\\ \text{Invariance sous translation}\\ \text{Invariance sous rotation}\\ \text{Interactions à courte portée}\end{array}\right\}$$

Invariance d'échelle et groupe conforme

$$\left.\begin{array}{l}\text{Invariance d'échelle}\\ \text{Invariance sous translation}\\ \text{Invariance sous rotation}\\ \text{Interactions à courte portée}\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Invariance conforme.}$$

Groupe conforme = ensemble des transformations qui transforme la métrique comme

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Omega^2(x)\, g_{\mu\nu}(x).$$

En prenant $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x)$, on a l'équation de Killing conforme

$$\partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu = \frac{2}{d} \partial_\alpha \varepsilon^\alpha \, g_{\mu\nu}.$$

Invariance d'échelle et groupe conforme

En $d \geq 3$ dimensions, on montre qu'on a

- les transformations de Poincaré $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} + a^{\mu}$,
- les dilatations $x'^{\mu} = \alpha\, x^{\mu}$,
- les *transformations spéciales conformes* $x'^{\mu} = \dfrac{x^{\mu} - c^{\mu}x^2}{1 - 2c \cdot x + c^2 x^2}$.

$\mathrm{Conf}(\mathbb{R}^{p,q}) \simeq SO(p+1, q+1)$

Invariance d'échelle et groupe conforme

En $d \geq 3$ dimensions, on montre qu'on a

- les transformations de Poincaré $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} + a^{\mu}$,
- les dilatations $x'^{\mu} = \alpha\, x^{\mu}$,
- les *transformations spéciales conformes* $x'^{\mu} = \dfrac{x^{\mu} - c^{\mu} x^2}{1 - 2c \cdot x + c^2 x^2}$.

$\mathrm{Conf}(\mathbb{R}^{p,q}) \simeq SO(p+1, q+1)$

$$\frac{x'^{\mu}}{x'^2} = \frac{x^{\mu}}{x^2} + b^{\mu}$$

TSC = Inversion ∘ Translation ∘ Inversion

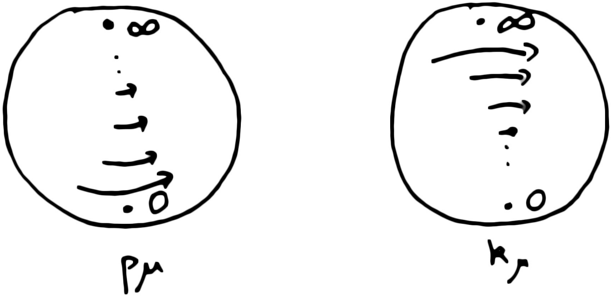


Figure: From Simmons-Duffin, 2015 [2]

États et opérateurs primaires

En TCC, un état est caractérisé par son spin l et sa *scaling dimension* Δ tq

$$D\left|\Delta, l\right\rangle = -i\Delta\left|\Delta, l\right\rangle$$

$$M_{\mu\nu}\left|\Delta, l\right\rangle_{\alpha} = \left(S_{\mu\nu}\right)_{\alpha}{}^{\beta}\left|\Delta, l\right\rangle_{\beta}.$$

Le vide est tq $D\left|0\right\rangle = 0 = M_{\mu\nu}\left|0\right\rangle$.

États et opérateurs primaires

En TCC, un état est caractérisé par son spin l et sa *scaling dimension* Δ tq

$$D\,|\Delta, l\rangle = -i\Delta\,|\Delta, l\rangle$$
$$M_{\mu\nu}\,|\Delta, l\rangle_{\alpha} = (S_{\mu\nu})_{\alpha}{}^{\beta}\,|\Delta, l\rangle_{\beta}\,.$$

Le vide est tq $D\,|0\rangle = 0 = M_{\mu\nu}\,|0\rangle$.

Opérateur primaire :

$$\psi'_{\Delta}(\mathrm{x}') = \Omega^{-\Delta}(x)\,R\,[M^{\mu}{}_{\nu}(x)]\;\psi_{\Delta}(\mathrm{x})$$

où R est une représentation de $SO(d)$.
Un état est construit par $|\Delta,\, l\rangle = \psi(0)\,|0\rangle$.

Fonctions de corrélation

En TCC, les fonctions de corrélation à 2 et 3 points sont complètement déterminés par l'invariance conforme :

$$\langle \psi_i(x)\psi_j(y)\rangle = \begin{cases} \dfrac{N_{ij}}{|x-y|^{2\Delta}} & \text{si } \Delta_i = \Delta_j = \Delta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Fonctions de corrélation

En TCC, les fonctions de corrélation à 2 et 3 points sont complètement déterminés par l'invariance conforme :

$$\langle \psi_i(x)\psi_j(y)\rangle = \begin{cases} \dfrac{N_{ij}}{|x-y|^{2\Delta}} & \text{si } \Delta_i = \Delta_j = \Delta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En PS, les champs de spins $s(x)$ sont des opérateurs primaires et donc

$$\langle s(x)s(0)\rangle \propto |x|^{-2\Delta_s}$$

Et, $\Delta_i = d - y_i$

Fonctions de corrélation

En TCC, les fonctions de corrélation à 2 et 3 points sont complètement déterminés par l'invariance conforme :

$$\langle \psi_i(x)\psi_j(y) \rangle = \begin{cases} \dfrac{N_{ij}}{|x-y|^{2\Delta}} & \text{si } \Delta_i = \Delta_j = \Delta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En PS, les champs de spins $s(x)$ sont des opérateurs primaires et donc

$$\langle s(x)s(0) \rangle \propto |x|^{-2\Delta_s}$$

Et, $\Delta_i = d - y_i$, donc $\longrightarrow \eta = 2\Delta_s + 2 - d$.

Intégrale de chemin en physique statistique

Dans le modèle d'Ising, on prend un champ de magnétisation $\vec{m}(x)$.

$$Z = \int_{|k|<\Lambda} \mathcal{D}m \, \exp\left(-\beta F[m(\mathrm{x})]\right)$$

avec $\Lambda \sim 1/a$ et F est l'*énergie libre de Landau*.
Pour le modèle d'Ising,

$$F = \int d^d\mathrm{x} \, \left[\frac{1}{2}\alpha_2(T)m^2 + \frac{1}{4}\alpha_4(T)m^4 + \frac{1}{2}\gamma(T)(\nabla m)^2 + \cdots - h \cdot m\right].$$

Intégrale de chemin en physique statistique

Dans le modèle d'Ising, on prend un champ de magnétisation $\vec{m}(x)$.

$$Z = \int_{|k|<\Lambda} \mathcal{D}m \, \exp\big(-\beta F[m(\mathrm{x})]\big)$$

avec $\Lambda \sim 1/a$ et F est l'*énergie libre de Landau*.
Pour le modèle d'Ising,

$$F = \int d^d\mathrm{x} \left[\frac{1}{2}\alpha_2(T)m^2 + \frac{1}{4}\alpha_4(T)m^4 + \frac{1}{2}\gamma(T)(\nabla m)^2 + \cdots - h \cdot m\right].$$

En TQC,

$$Z = \int \mathcal{D}\psi \, \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[\psi]\right).$$

Bibliographie I

Image Ising : https://www.youtube.com/watch?v=MxRddFrEnPc by Douglas Ashton

(1) Rychkov, S., 2017. EPFL Lectures on Conformal Field Theory in $D >= 3$ Dimensions. https://arxiv.org/abs/1601.05000v2

(2) Simmons-Duffin, D., 2016. TASI Lectures on the Conformal Bootstrap. https://arxiv.org/abs/1602.07982

(3) Cardy, J., 1996. Scaling and Renormalization in Statistical Physics. Cambridge: Cambridge University Press (Cambridge Lecture Notes in Physics). https://doi.org/10.1017/CBO9781316036440

(4) Di Francesco, P., Mathieu, P., Sénéchal, D., 1997. Conformal Field Theory, Graduate Texts in Contemporary Physics. Springer New York, New York, NY. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2256-9

(5) Ginsparg, P., 1988. Applied Conformal Field Theory. https://arxiv.org/abs/hep-th/9108028

Bibliographie II

(6) Henkel, M., 1999. Conformal Invariance and Critical Phenomena. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-03937-3

(7) Kardar, M., 2007. Statistical Physics of Fields. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511815881

(8) Ngô, C., Ngô, H., 2008. Physique statistique: Introduction: Cours et exercices corrigés. Dunod, Paris.

(9) Schellekens, A.N., 1996. Introduction to Conformal Field Theory. Fortschr. Phys. 44, 605–705. https://doi.org/10.1002/prop.2190440802

(10) D. Tong's lectures on Statistical Field Theory available at http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/sft.html

Backup

Beta function, y, z et Δ

Avec $b = 1 + l$, on peut définir la fonction beta par

$$\beta_a(K) := -\frac{\partial K_a}{\partial l}.$$

Les valeurs propres y_i de $\left.\frac{-\partial \beta_a}{\partial K_b}\right|_{K^*}$ sont les y, z,...

Les *scaling dimensions* Δ_i sont

$$\Delta_i = d - y_i.$$

State-operator correspondence

$$\begin{aligned} [K_\mu, \psi(0)] &= 0 \\ [D, \psi(0)] &= -i\Delta\psi(0) \\ [M_{\mu\nu}, \psi(0)] &= \Sigma_{\mu\nu}\,\psi(0). \end{aligned}$$

State-operator correspondence

$$
\begin{aligned}
[K_\mu, \psi(0)] &= 0 \\
[D, \psi(0)] &= -i\Delta\psi(0) \\
[M_{\mu\nu}, \psi(0)] &= \Sigma_{\mu\nu}\,\psi(0).
\end{aligned}
$$

A state is generated by a primary operator inserted at the origin on the vacuum, i.e. $|\Delta\rangle = \psi(0)\,|0\rangle$.

State-operator correspondence

$$[K_\mu, \psi(0)] = 0$$
$$[D, \psi(0)] = -i\Delta\psi(0)$$
$$[M_{\mu\nu}, \psi(0)] = \Sigma_{\mu\nu}\,\psi(0).$$

A state is generated by a primary operator inserted at the origin on the vacuum, i.e. $|\Delta\rangle = \psi(0)\,|0\rangle$.

With $[D, P_\mu] = iP_\mu$ and $[D, K_\mu] = -iK_\mu$, one have

$$DP_\mu\,|\Delta\rangle = i(-\Delta + 1)P_\mu\,|\Delta\rangle \qquad DK_\mu\,|\Delta\rangle = i(-\Delta - 1)K_\mu\,|\Delta\rangle\,.$$

State-operator correspondence

$$[K_\mu, \psi(0)] = 0$$
$$[D, \psi(0)] = -i\Delta\psi(0)$$
$$[M_{\mu\nu}, \psi(0)] = \Sigma_{\mu\nu}\,\psi(0).$$

A state is generated by a primary operator inserted at the origin on the vacuum, i.e. $|\Delta\rangle = \psi(0)\,|0\rangle$.

With $[D, P_\mu] = iP_\mu$ and $[D, K_\mu] = -iK_\mu$, one have

$$DP_\mu\,|\Delta\rangle = i(-\Delta + 1)P_\mu\,|\Delta\rangle \qquad DK_\mu\,|\Delta\rangle = i(-\Delta - 1)K_\mu\,|\Delta\rangle\,.$$

One generates a *conformal multiplet*:

$$|\Delta\rangle\,, P_\mu\,|\Delta\rangle\,, P_\mu P_\nu\,|\Delta\rangle\,, \ldots$$

Operator Product Expansion (OPE)

$$\psi_i(x)\psi_j(0)\,|0\rangle = |\Psi\rangle$$

Operator Product Expansion (OPE)

A state can be expanded onto the dilatation eigenvector basis:

$$\psi_i(x)\psi_j(0)\left|0\right\rangle = \left|\Psi\right\rangle = \sum_n c_n(x)\left|\Delta_n\right\rangle .$$

Operator Product Expansion (OPE)

A state can be expanded onto the dilatation eigenvector basis:

$$\psi_i(x)\psi_j(0)\left|0\right\rangle = \left|\Psi\right\rangle = \sum_n c_n(x)\left|\Delta_n\right\rangle .$$

Since $\left|\Delta_n\right\rangle$ is either a primary or a descendant state,

$$\psi_i(x)\psi_j(0)\left|0\right\rangle = \sum_{\mathcal{O}\ \ primaries} C_{ij\mathcal{O}}(x,\partial_y)\mathcal{O}(y)|_{y=0}\left|0\right\rangle .$$

n-pt function $\xrightarrow{OPE}$ $(n-1)$-pt function